ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

CRITERIOS DE CONVERGENCIA DE SERIES.

En general, repetimos, no vamos a poder encontrar la suma de una serie convergente. Pero si su carácter, es decir si es convergente o no lo es. Para ello se tiene una colección de criterios que vamos a presentar a continuación. En general se basan en el criterio de comparación de series que ya hemos visto. Esta comparación solo se puede hacer con series del mismo signo, por lo que la mayoría de criterios que presentamos lo son para series de términos positivos.

Proposición. 1. *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, *si la serie en valor absoluto* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente, entonces también lo es la primera serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Demostración: Consideramos

$$b_n = \begin{cases} a_n & \text{si} \quad a_n \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases} \qquad \text{y} \qquad c_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a_n \geq 0 \\ -a_n & \text{si} \quad a_n < 0 \end{cases}.$$

Como $b_n \leq |a_n|$ y $c_n \leq |a_n|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se tiene por comparación que las series $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ son ambas convergente. Ahora como $a_n = b_n - c_n$ para todo n, se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (b_n - c_n) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n - \sum_{n=1}^{\infty} c_n$$

□

Definición. 1. *Dada una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *se dice que*

a: ***converge absolutamente*** *si la serie en valor absoluto converge (e.d. si la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *es convergente);*

b: *es* ***condicionalmente convergente*** *si la serie converge, pero no lo hace en valor absoluto.*

Procedimiento: Dada una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

- primero la ponemos en valor absoluto $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$;
- a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ le aplicamos los criterios de convergencia para series de términos positivos que veremos a continuación;
- si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente, también lo es la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;
- si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ **no** es convergente, entonces aplicamos los criterios de convergencia para series alternadas a la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$;

Teorema. 1. ***(Criterio de Leibniz)*** *Si $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente con $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, entonces la serie alternada $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ es convergente.*

Demostración: Consideramos $(s_N = \sum_{n=1}^{N}(-1)^n a_n))_{N=1}^{\infty}$ la sucesión de sumas parciales. Entonces, usando que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente,

- la subsucesión de términos pares $(s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} a_n))_{N=1}^{\infty}$ es decreciente, ya que
$$s_{2N} \geq s_{2N} + (-1)^{2N+1} a_{2N+1} + (-1)^{2(N+1)} a_{2(N+1)} = s_{2(N+1)};$$
- la subsucesión de términos impares $(s_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} a_n))_{N=1}^{\infty}$ es creciente, ya que
$$s_{2N+1} \leq s_{2N+1} + (-1)^{2N+2} a_{2N+2} + (-1)^{2(N+1)+1} a_{2(N+1)+1} = s_{2(N+1)+1};$$
- $s_2 \geq s_i$ siempre que i sea impar y $s_1 \leq s_j$ siempre que j sea par. De forma general, $s_i \leq s_j$ siempre que i sea impar y j par (ejercicio).

Como la subsucesión $(s_{2N} = \sum_{n=1}^{2N} a_n)_{N=1}^{\infty}$ es decreciente y está acotada inferiormente por s_1 tiene límite, pongamos
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N} a_n = \alpha.$$

Como la subsucesión $(s_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} -a_n)_{N=1}^{\infty}$ es creciente y está acotada superiormente por s_2 tiene límite, pongamos
$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{2N+1} -a_n = \beta.$$
Es claro además que $\beta \leq \alpha$. Como
$$0 \leq \alpha - \beta \leq s_{2N} - s_{2N+1} = a_{2N+1} \to_{N\to\infty} = 0,$$
se deduce que $\alpha = \beta$ y por tanto la serie alternada es convergente a α $\square$

Ejemplos. 1.

- *El ejemplo típico de serie alternada condicionalmente convergente es* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. *En valor absoluto es la serie armónica que no converge. El criterio de Leibniz nos dice que la serie converge.*
- *Se considera la serie alternada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}$. *Por un lado*

$$\lim_{n\to\infty} (\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n = e^{-1} \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2}).$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\frac{(-n)^n}{(n+1)^{n+1}}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}(\frac{1}{1+\frac{1}{n}})^n \geq \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Es decir la serie no converge absolutamente. Por otro lado

$$\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{1}{n+1}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \downarrow_{n\to\infty} 0,$$

ya que ambas sucesiones $(\frac{1}{n+1})_{n=1}^{\infty}$ *y* $(\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n})_{n=1}^{\infty}$ *son decrecicentes. Luego por el criterio de Leibniz la serie converge y es por tanto condicionalmente convergente.*

Las series condicionalmente convergentes pueden tener propiedades sorprendentes como la siguiente debida a B. Riemann.

Observación. 1. *Dada una serie condicionalmente convergente* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y cualquier número real* $\alpha \in \mathbb{R}$, *se puede encontrar una biyección* $\gamma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, *es decir una reordenación de los números naturales, de modo que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\gamma(n)} = \alpha.$$

Comencemos ahora con los criterios de convergencia para series de términos positivos. Daremos solo dos, aunque hay muchos más. Los siguientes son los que más aplicaciones tienen, sobre todo el **Criterio del Cociente** que veremos en segundo lugar.

Teorema. 2. *(**Criterio de Comparación por Cociente**). Sean* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *dos series de términos positivos de modo que existe*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0,$$

entonces

- *si una serie converge la otra también;*
- *equivalentemente, si una serie diverge la otra también.*

Demostración: Como $a_n, b_n \geq 0$, se tiene que $c > 0$. Tomemos $0 < \epsilon < \frac{c}{2}$, y recordando la definición de límite de una sucesión, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$|\frac{a_n}{b_n} - c| < \epsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad c - \epsilon < \frac{a_n}{b_n} < c + \epsilon$$

y por tanto

$$\frac{c}{2} b_n \leq a_n \leq \frac{3c}{2} b_n \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Luego

$$\frac{c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \frac{3c}{2} \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Ahora es claro que si una serie converge, como acota a la otra salvo una constante, esta otra también converge $\square$

Ejemplo. 1. *Se considera la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - n + 1}$. *Esta serie es de términos positivos y se parece a la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Ahora*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2 - n + 1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2}{n^2 - n + 1} = 1.$$

Luego como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es convergente, el criterio de comparación por cociente nos dice que nuestra serie también lo es.*

Teorema. 3. *(**Criterio del Cociente**). Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos de modo que existe*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha.$$

Entonces

- *si* $\alpha < 1$ *la serie es convergente;*
- *si* $\alpha > 1$ *la serie es divergente;*
- *si* $\alpha = 1$ *el criterio no decide, es decir la serie en cuestión puede converger o no.*

Observemos que este criterio es intrinseco a la serie, no necesitamos de otras para compararla.

Demostración: Veamos el primer caso, el otro es análogo aunque la consecuencia es la contraria. Si $\alpha < 1$, podemos encontar $\alpha < r < 1$ y un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < r \qquad \Rightarrow a_{n+1} < r a_n.$$

Así para todo $n \geq n_0$ tenemos que

$$a_n < r a_{n-1} < r^2 a_{n-2} < \ldots < r^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Y por tanto

$$\sum_{n=n_0}^{N} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{N} r^{n-n_0} a_{n_0} = \sum_{k=0}^{N-n_0} r^k a_{n_0} \leq a_{n_0} \sum_{k=0}^{\infty} r^k = a_{n_0} \frac{1}{1-r},$$

donde hemos usado la suma de la serie geométrica en la última igualdad.

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es de términos positivos y sus sumas parciales están acotadas, concluimos que la serie converge $\square$

Ejemplos. 2.

- *La serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \cdots \times 3n}$, *la podemos escribir como*

  $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3 \times 6 \times \cdots \times 3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}{3^n \times 1 \times 2 \times \cdots \times n}.$$

  Aplicando el Criterio del Cociente

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)\times(2n+3)}{3^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1\times3\times5\times\cdots\times(2n+1)}{3^n n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^n(2n+3)}{3^{n+1}(n+1)} = \frac{2}{3} < 1,$$

  vemos que la serie converge.

- *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a^n n^a$, *para cierto* $a > 0$ *va converger o no dependiendo del valor de* a. *Aplicanco el Criterio del Cociente*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{a^{n+1}(n+1)^a}{a^n n^a} = \lim_{n\to\infty} a(1+\frac{1}{n})^a = a.$$

  Si $a < 1$ *la serie converge. Si* $a > 1$ *la serie diverge. Y si* $a = 1$, *en este caso la serie queda*

  $$\sum_{n=1}^{\infty} n = \infty,$$

  luego la serie diverge.

- *La serie armónica* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *es divergente y se tiene que*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

  La serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ *es convergente y se tiene que*

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1.$$

Los dos ejemplos anteriores muestran que cuando $\alpha = 1$, el Criterio del Cociente no adivina el carácter de la serie en cuestión.

Existen muchos más criterios de convergencia, pero con los que tenemos se pueden hacer muchas cosas. En el Tema de la Integral, veremos el **Criterio de la Intergral** , sencillo y útil que nos permite, entre otras cosas, asegurar que las series del tipo $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ son convergentes si $p > 1$.

Apéndice:

Teorema. 4. *(**Criterio de la Integral**) Dada una función $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, de modo que $f \geq 0$, es decreciente y tal que existe la integral $\int_0^{\infty} f(x)dx$, entonces la serie de términos positivos $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ es convergente.*

Demostración: (Ver **Integrales Impropias:** Aplicaciones.) $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es