ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

APLICACIONES DE LAS SERIES.

Numeración. Ya estamos preparados para probar que los números reales son equellos que se pueden escribir como parte entera y parte decimal, periódica o no.

Observación. 1. *Si tenemos un número $x = a, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$ con parte entera $a \in \mathbb{Z}$ y parte decimal $0, a_1 a_2 \dots a_n \dots,$ donde $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, lo que queros decir es que*

$$x = a + \frac{a_1}{10} + \frac{a_1}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \dots.$$

(o con signo $(-)$ si x es negativo). Los números de esta forma son números reales ya que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} \leq 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 9 \frac{\frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

es una serie de términos positivos con sumas parciales acotadas, por tanto convergente a un número real.

Ahora lo que nos queda ver es que todo número real se puede escribir de esa forma. Dado un número real $x \in \mathbb{R}$, sabemos que existe un entero $a \in \mathbb{Z}$, de modo que $a \leq x < a + 1$. Así $x = a + (x - a)$. Es claro que $r = x - a \in [0, 1)$. Luego si vemos que todo número real entre 0 y 1 se puede escribir de forma decimal habremos completado nuestro problema.

Teorema. 1. *Para todo número real $r \in [0, 1)$, existe una serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, con $a_n \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$, de modo que la serie converge a r,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n} = r.$$

Demostración: Sea $r \in [0, 1)$. Si dividimos el intervalo $[0, 1)$ en diez partes iguales, r caerá en alguna de esas partes. Es decir

- para $N = 1$ sea $a_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ de modo que
$$\frac{a_1}{10} \leq r < \frac{a_1 + 1}{10}.$$

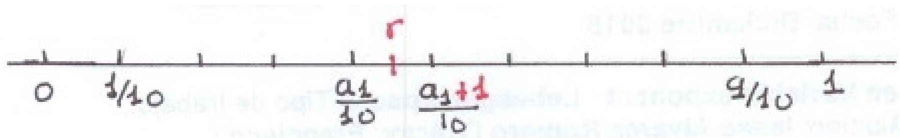

FIGURA 1. r entre décimas.

Si dividimos el intervalo $[\frac{a_1}{10}, \frac{a_1 + 1}{10})$ en diez partes iguales, r caerá en alguna de esas partes. Es decir

- para $N = 2$ sea $a_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ de modo que
$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq r < \frac{a_1}{10} + \frac{a_2 + 1}{10^2}.$$
Aplicando la lupa:

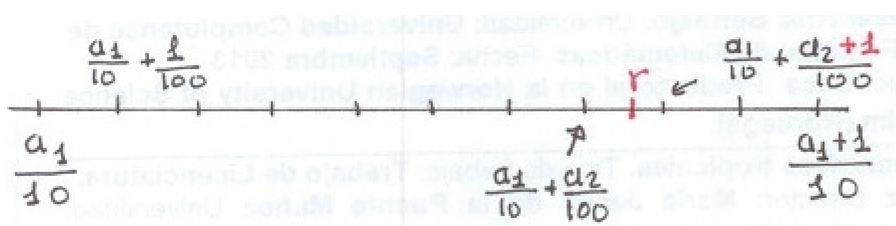

FIGURA 2. r entre centésimas.

Si repetimos el proceso para $N = 3, 4, \dots$, por inducción, supuesto que para N
$$\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq r < (\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{10^n}) + \frac{a_N + 1}{10^N},$$
entonces, dividiendo por diez,

- para $N + 1$ sea $a_{N+1} \in \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ de modo que
$$(\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}) + \frac{a_{N+1}}{10^{N+1}} \leq r < (\sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}) + \frac{a_{N+1} + 1}{10^{N+1}}.$$

Este proceso nos premite construir una serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, donde los a_n se seleccionan del modo anterior, la cuál converge a r. Veámoslo.
$$|r - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}| = r - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n} \leq (\sum_{n=1}^{N-1} \frac{a_n}{10^n}) + \frac{a_N + 1}{10^N} - \sum_{n=1}^{N} \frac{a_n}{10^n}$$

$$= \frac{1}{10^N} \to_{N\to\infty} 0$$

□

Ejemplo. 1. *¿Qué número real r representa la serie $\frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{10^n}$?*

Demostración: Es fácil decir que $r = 0,1\widehat{3}$, un número con parte decimal mixta, donde 3 es el periodo. Pero además

$$r = \frac{1}{10} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

sumando la serie geométrica que aparece

$$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10}\frac{1}{9} = \frac{9}{90} + \frac{3}{90} = \frac{2}{15}$$

□

Funciones dadas por series. Consideramos la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, donde x es un número real cualquiera. Observemos que variando x obtenemos distintos valores de la suma de la serie, si converge para tal x. Esto lo podemos ver como una función

$$\begin{array}{cccccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ & & x & \to & f(x) & = & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \end{array}$$

donde f está definida por una serie y cuyo **dominio**

$$\mathrm{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \ : \ \text{la serie} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \text{ es convergente}\}$$

son los puntos los x para los cuáles la serie es convergente. En este caso, si aplicamos el criterio del cociente a la serie en valor absoluto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|x|^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

el valor nulo del límite, menor que 1, nos dice que la serie converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$.

Más adelante, en el Tema de Representación Polinómica de Funciones, veremos como algunas funciones se pueden representar por series, como por ejemplo:

- $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$,
- $\cos x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$, y que

- $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo. 2. *Sean* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *dos series absolutamente convergentes. Entonces para todo* $x \in \mathbb{R}$ *la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad (*)$$

es absolutamente convergente.

Demostración: Lo anterior es claro ya que

$$|a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx| \leq |a_n||\cos nx| + |b_n||\operatorname{sen} nx| \leq |a_n| + |b_n|,$$

y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| + |b_n|$ es convergente por ser suma de series convergentes. $\square$

Luego tiene sentido definir una función f por

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

En cursos superiores de Análisis Matemático se puede ver por ejemplo que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad \text{para todo} \quad x \in [-\pi, \pi].$$

Una función f que se puede escribir con una expresión del tipo $(*)$, se dice que esta expresada en su **serie de Fourier**. Lo importante de este modo de escribir una función es que se puede encontrar la **serie de Fourier** de funciones dadas de forma experimental, es decir de funciones que vienen dadas por muestras de una magnitud obtenidad por medición en intervalos de tiempos iguales (Δ).

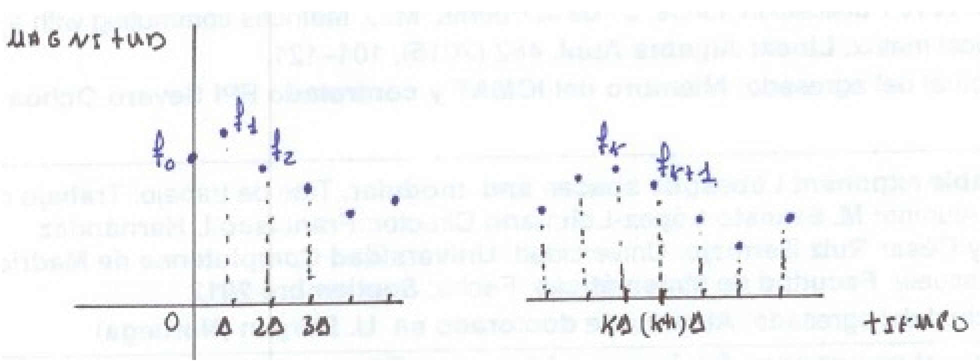

Figura 3. Función experimental, obtenida por muestreo.

Este tipo de procesos es la base matemática de los populares archivos informáticos multimedia: $*$.mp3, $*$.jpg,...etc.

Probabilidad. La serie geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, de suma 1 como sabemos, da pie a la llamada **Distribución de Probabilidad Geométrica**.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es