AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SERIES DE FOURIER. INTRODUCCIÓN

Consideremos la función $f(x) = A \operatorname{sen} x$. Esta función es 2π-periódica (e.d.$f(x + 2\pi) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$).

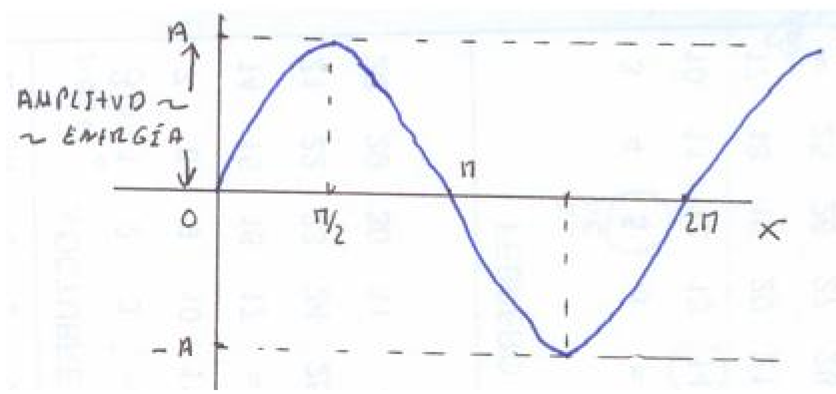

FIGURA 1. $f(x) = A \operatorname{sen} x$

Decimos entonces que:

1. el *periodo* de la función es $T = 2\pi$.
2. $\frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$ es la *frecuencia* de la función.

Si la variable x es el tiempo, el seno realiza un *ciclo* cada 2π unidades de tiempo. La medida física de la frecuencia es el *hercio* ($Hz = \dfrac{\text{ciclos}}{\text{segundos}}$).

Más adelante veremos como un circuito RLC puede producir una señal como la anterior.

Consideremos ahora la función $g(x) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha)$, donde $k \in \mathbb{N}$. La función g es $\frac{2\pi}{k}$-periódica (e.d. $A \operatorname{sen}(k(x + \frac{2\pi}{k}) + \alpha) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha)$ para toda $x \in \mathbb{R}$). Además esta *desfasada* α respecto de $A \operatorname{sen}(kx)$.

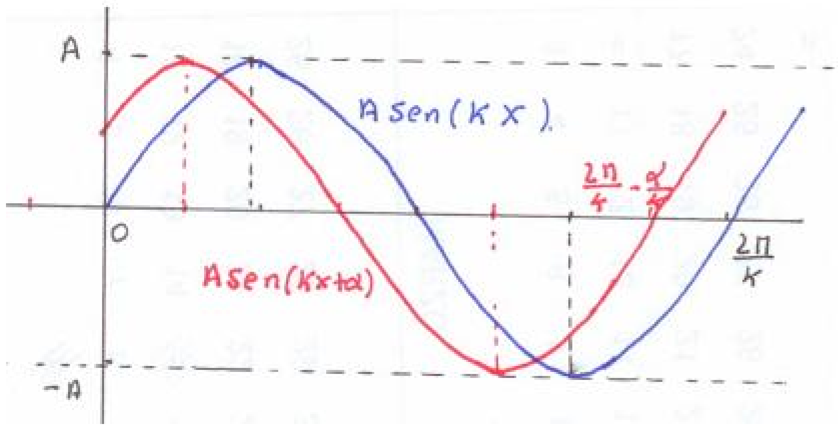

FIGURA 2. Señales desfasadas

1. El *periodo* de la función g es $T = \dfrac{2\pi}{k}$,
2. la *frecuencia* de la función g es $\dfrac{1}{T} = \dfrac{k}{2\pi}$ ciclos por la unidad de tiempo respecto de x.

Ejemplo 1. *Las funciones* $\operatorname{sen} x$*, y* $\cos x$*,* $\operatorname{sen} 2x$*, y* $\cos 2x$*,...etc tienen frecuencias iguales a* $\frac{1}{2\pi}, \frac{2}{2\pi}$ *...etc respectivamente.*

Ejemplo 2. *La función o señal* $f(t) = 2\operatorname{sen} t - 50\operatorname{sen} 3t + 10\operatorname{sen} 200t$*,* t *tiempo medido en segundos, está formada por tres señales superpuestas de frecuencias* $\frac{1}{2\pi}$ *Hz,* $\frac{3}{2\pi}$ *Hz y* $\frac{100}{\pi}$ *Hz. Esta última es la de mayor frecuencia y siendo la señal de frecuencia* $\frac{3}{2\pi}$ *Hz la de mayor energía.*

Dada una señal f

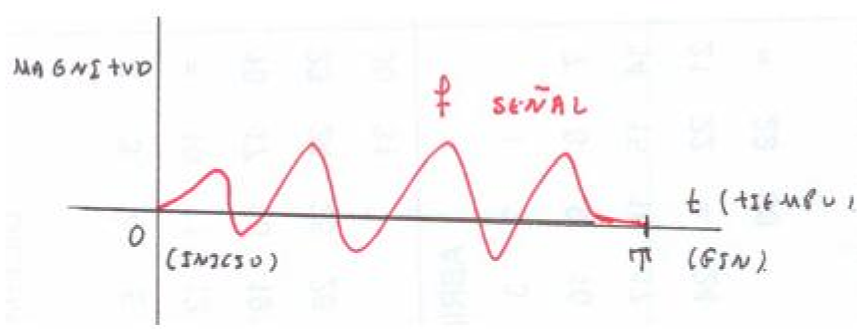

FIGURA 3. Registro de un fenómeno.

nos podemos preguntar si f se puede escribir como una combinación lineal de funciones de frecuencias simples como $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$. J. Fourier postuló en 1808 que toda función (señal) periódica se puede escribir como una combinación lineal " infinita" de funciones $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$. Es decir, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica se pueden encontrar números $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ de modo que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \qquad (*)$$

(la serie anterior recibe el nombre de *serie de Fourier* de la función f). La función f la estamos escribiendo como una superposición de señales de frecuencias simples.

NOCIONES BÁSICAS DE TEORÍA DE LA SEÑAL

Supongamos que la siguiente igualdad es cierta

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \qquad (*)$$

Si $(*)$ es convergente, entonces $\sum_{n=N_0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx \sim 0$ para un N_0 grande (esto es lo que nos dirá más adelante el Teorema de Riemman-Lebesgue). Luego

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{N_0} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

y así f está determinada esencialmente por los núneros: $a_0, b_0, a_1, b_1, ..., a_{N_0}$ y b_{N_0}. Esto es, por una cantidad finita de valores (principio en el que se basa la llamada *compresión* de datos).

Si una señal f tiene una frecuencia única ($f(x) = A \operatorname{sen}(kx + \alpha)$), como puede ser la onda portadora de una emisión de radio sin modular, sin portar información; y si al recibir las señales de radio nos llega una señal del tipo:

$$\widetilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

filtraremos la señal considerando solamente la parte de la señal que contiene las frecuencias que nos interesan $a_k \cos(kx) + b_k \operatorname{sen}(kx)$ (*filtrado digital*). Así quitaremos las frecuencias que se han ido adheriendo por el camino (*medio*), es decir quitamos el *ruido* que lleva la señal de partida.

Señalamos que los circuitos RLC permiten filtrar señales (*filtros analógicos*), pero funcionan de forma distinta a los digitales.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`