AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

OTRAS CONSIDERACIONES.
EL FENÓMENO DE GIBBS.

Consideremos una función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (puede estar definida sobre cualquier otro intervalo), de modo que f no es continua en cierto punto $x_0 \in [-\pi, \pi]$. Además ocurre que existe la serie de Fourier de f y ésta converge puntualmente a f sobre $[-\pi, \pi] \backslash \{x_0\}$. En este caso se puede probar que cerca de x_0 la serie de Fourier no se aproxima uniformemente a f tanto en $(x_0 - r, x_0)$ como en $(x_0, x_0 + r)$ para todo $r > 0$. El fenómeno se visualiza en el siguiente dibujo.

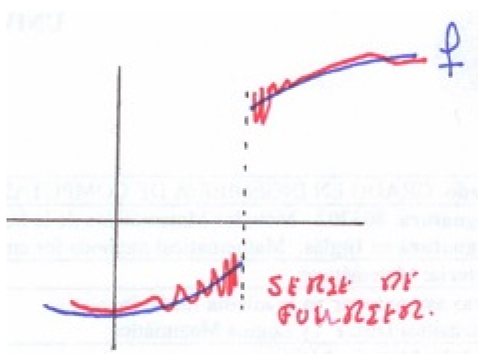

Figura 1. Fenómeno de Gibbs.

SERIES DE FOURIER PARA FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

De forma similar al caso de una variable se puede ver que:

$$\int\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \cos(nx+my)\cos(n'x+m'y)dxdy = 0 \quad \text{si } n \neq n' \quad \text{ó} \quad m \neq m'.$$

$$\int\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \cos(nx+my)\operatorname{sen}(n'x+m'y)dxdy = 0 \quad \text{para todos } n, n', m \text{ y } m'.$$

$$\int\int_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]} \operatorname{sen}(nx+my)\operatorname{sen}(n'x+m'y)dxdy = 0 \quad \text{si } n \neq n' \quad \text{ó} \quad m \neq m'.$$

Así tenemos una familia ortogonal en senos y cosenos en varias variables; por tanto es posible definir unos coeficientes de Fourier y una serie de Fourier para una función de varias variables

$$\begin{array}{cccc} f & : & [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \to & f(x,y) \end{array}$$

de modo que

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n,m\in\mathbb{N}} a_{n,m}\cos(nx+my) + b_{n,m}\operatorname{sen}(nx+my)$$

donde $a_0, a_{n,m}$ y $b_{n,m}$ se calculan de forma análoga a como se hace con los coeficientes de Fourier para funciones de una variable.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es