AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

CÁLCULO DE LA SERIE DE FOURIER

El cálculo matemático de la serie de Fourier así como el estudio "teórico" de la misma se sustenta en el hecho de que las funciones $\cos nx$ y $\operatorname{sen} nx$ son *ortogonales*. ¿Qué significa esto?

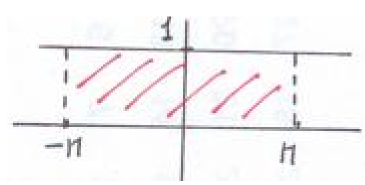
Lema 1.

1. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = 0$ *si* $n \neq m$.
2. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} mx dx = 0$
3. $\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx \operatorname{sen} mx dx = 0$ *si* $n \neq m$.
4. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$
5. $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$; $\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \pi$

Demostración: Empecemos con el apartado 4. Usando la regla de Barrow

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nx dx = \frac{-\cos nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0; \qquad \text{y} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = \frac{\operatorname{sen} nx}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Para ver el apartado 5 usaremos que $\cos^2 nx = \frac{1 + \cos 2nx}{2}$ y que $\operatorname{sen}^2 nx = 1 - \cos^2 nx$. Así $\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi$,



.

Por otro lado

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} dx - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos 2nx}{2} dx = \pi - 0$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 nx dx = \int_{-\pi}^{\pi} 1 x dx - \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx dx = 2\pi - \pi = \pi.$$

Ahora vamos a probar 1 usando la fórmula trigonométrica

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2}[\cos(A+B) + \cos(A-B)].$$

Tenemos que para $n \neq m$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\left[\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)x dx + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)x dx\right] = 0.$$

Por último 2 y 3 se prueban igual que 1 teniendo en cuentas las fómulas trigonométricas

$$\cos A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$$

y

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)] \square$$

Ya estamos en condiciones de dar la definición de *Ortogonalidad.* Aunque el ejemplo más importante lo tenemos ya dado en el lema anterior, el concepto de ortogonalidad es mucho más general.

Definición 1. *Dado un subconjuto de la recta real, $A \subset \mathbb{R}$,*

1. *Una sucesión de funciones $(f_n)_n$ sobre A, $f_n : A \to \mathbb{R}$, se llama ortogonal si*

$$\int_A f_n(x) f_m(x) dx = 0 \qquad \textit{siempre que} \qquad n \neq m.$$

2. *Una sucesión de funciones $(g_n)_n$ sobre A a valores complejos, $g_n : A \to \mathbb{C}$, se llama ortogonal si*

$$\int_A g_n(x) \overline{g_m}(x) dx = 0 \qquad \textit{siempre que} \qquad n \neq m.$$

Ejemplos 1. 1. *La sucesión $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_{n=1}^{\infty}$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ es una familia ortogonal, como hemos visto en el lema anterior.*

2. *La sucesión* $\{\cos nx\}_{n\geq 0}$ *sobre el intervalo* $[0,\pi]$ *es también ortogonal.*
   Demostración:
$$\int_0^\pi \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2}\left[\int_0^\pi \cos(n+m)xdx + \int_0^\pi \cos(n-m)xdx\right]$$
$$= \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(n+m)x}{n+m}\Bigg|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}(n-m)x}{n-m}\Bigg|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} = 0 \qquad \textit{para} \qquad n \neq m.$$
   Además $\displaystyle\int_0^\pi 1 \cos nx dx = \frac{\operatorname{sen} nx}{n}\Bigg|\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} = 0$
3. *La sucesión* $\{\operatorname{sen} nx\}_{n\geq 1}$ *sobre el intervalo* $[0,\pi]$ *es ortogonal.*
   Demostración: Se hace como en el ejemplo anterior usando esta vez que:
$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}[\cos(A-B) - \cos(A+B)]\square$$
4. *La sucesión de funciones que toma valores complejos* $\{e^{inx}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ *sobre el intervalo* $[-\pi,\pi]$ *es ortogonal.*
   Demostración: Usaremos la definición de ortogonalidad correspondiente a funciones que toman valores complejos y además las propiedades de la exponencial compleja que vimos en el tema anterior.
$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\overline{e^{imx}}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-m)x}dx$$
$$= \frac{e^{i(n-m)x}}{i(n-m)}\Bigg|\begin{matrix}\pi\\-\pi\end{matrix}$$
$$= \frac{1}{i(n-m)}\left[\cos(n-m)\pi + i\operatorname{sen}(n-m)\pi - \cos(n-m)(-\pi) - i\operatorname{sen}(n-m)(-\pi)\right] = 0.$$
   De lo anterior ya es claro que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} 1\overline{e^{inx}}dx = 0.$

En un curso amplio de *Análisis de Fourier*, el último de los ejemplo anterior sería quizás el más importante. Algo que se podrá intuir cuando en el tema siguiente estudiemos la *Transformada de Fourier*. Por la brevedad de nuestra exposición el ejemplo primero será el protagonista en lo que sigue.

Idea del cálculo de la serie de Fourier

Supongamos que una función f sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ es el límite uniforme de una serie de senos y cosenos, es decir

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx$$

con convergencia uniforme de la serie de funciones sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$. Entonces usando las propiedades de la convergencia uniforme respecto de la integral y la ortogonalidad de las funciones seno y coseno, podemos encontrar fórmulas para calcular los coeficientes $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. Así

1.
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nxdx$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nxdx = 2\pi a_0$$
y por tanto, despejando,
$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

2.
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos kxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nxd \cos kxdx$$
$$= a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kxdx = \pi a_k$$
y por tanto, despejando,
$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kxdx.$$

3.
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kxdx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \operatorname{sen} kxdx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} nxd \operatorname{sen} kxdx$$
$$= b_k \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 kxdx = \pi b_k$$

y por tanto, despejando,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx dx.$$

Lo anterior nos permite dar la siguiente definición.

Definición 2. *Dada una función $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ (no necesariamente 2π-periódica) se definen los coeficientes de Fourier asociados a f por*

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx.$$

con $n \in \mathbb{N}$. Se llama serie de Fourier de f a la serie de funciones

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \operatorname{sen} nx.$$

Cabe hacerse unas cuantas preguntas a la vista de la definición anterior. ¿Hay alguna relación entre la función f y su serie de Fourier? ¿La serie de Fourier converge uniformemente o al menos puntualmente sobre $[-\pi, \pi]$? ¿Lo hará a la función f?

Una señal real no actua sobre un periodo de tiempo predeterminado como pueda ser el intervalo $[-\pi, \pi]$. ¿Podemos definir la serie de Fourier de modo que con ella se pueda representar una señal localizada en cualquier intervalo de tiempo?

A estas preguntas trataremos de contestar en lo que sigue.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`