AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

SERIES DE FOURIER ABSTRACTAS

Una señal,

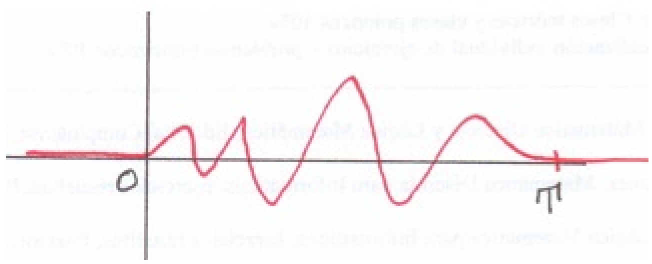

Figura 1. Registro experimental.

empieza a manifestarse en el algún momento que podemos llamar 0 y tendrá una duración de T. Este número T no tiene por que ser 2π.

Una señal,

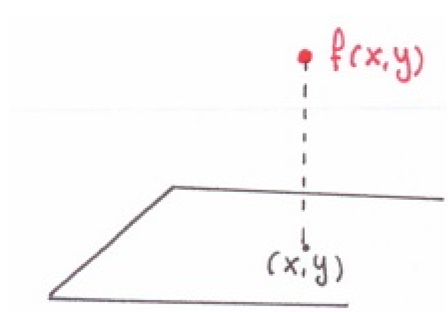

Figura 2. Registro experimental.

no tiene que estar definida solo sobre la recta real $\mathbb{R}$. Pensemos que a cada punto del plano $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, le podemos asociar un tono de gris entre 0 y 1 ($f(x, y) \in [0, 1]$), lo que permitiría registrar una imagen.

Una señal, no cabe solo representarla como una combinación líneal de $\operatorname{sen} nx$ y $\cos nx$, $n \in \mathbb{N}$. Podríamos usar otras familias de funciones orgonales.

Ejemplo 1. *Una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

cabría representarla como

$$f \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{int}$$

(**serie de Fourier compleja**).

En lo que sigue, veremos como calcular series de Fourier sobre **otras** familias ortogonales. Veremos como trabajar con funciones definidas en otros intervalos diferentes a $[-\pi, \pi]$. Solo al final, a título informativo, indicaremos como descomponer señales de funciones de varias variables.

COEFICIENTES DE FOURIER ABSTRACTOS

Consideremos una sucesión de funciones $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ definidas sobre un intervalo $[a, b]$, $\quad \phi_n : [a, b] \to \mathbb{K} \quad$ donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$. Supongamos que la familia es ***ortogonal*** y que una función f se puede escribir como $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n\phi_n(x)dx$ con convergencia uniforme.

Veamos que forma tienen los coeficientes a_n.

1. En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b a_n\phi_n\phi_m(x)dx \\ &= a_m \int_a^b \phi_m^2(x)dx\end{aligned}$$

y así, despejando

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\phi_m(x)dx}{\int_a^b \phi_m^2(x)dx} \qquad \text{para todo} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

2. En el caso de que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$$\int_a^b f(x)\overline{\phi_m(x)}dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b a_n \phi_n \overline{\phi_m(x)} dx$$
$$= a_m \int_a^b |\phi_m|^2(x) dx$$

y así, despejando

$$a_m = \frac{\int_a^b f(x)\overline{\phi_m(x)}dx}{\int_a^b |\phi_m|^2(x)dx} \qquad \text{para todo} \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Lo anterior nos permite dar la definición abstracta de ***serie de Fourier***.

Definición 1. *A los números $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ se les llama* ***coeficientes de Fourier*** *de la función f con respecto a la familia ortogonal $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sobre el intervalo $[a, b]$. A la serie de funciones*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \phi_m(x)$$

se la conoce como ***serie de Fourier*** *de la función f con respecto a la familia ortogonal $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ sobre el intervalo $[a, b]$.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`