AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EJEMPLOS DE OTRAS SERIES DE FOURIER

Ejemplos 1.

1. *La familia* $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_n$ *sobre el intervalo* $[-\pi, \pi]$ *(o sobre cualquier intervalo de longitud* 2π*,* $[a, a+2\pi]$*) es un caso particular de familia ortogonal sobre la que ya sabemos como calcular los coeficientes de Fourier y la serie de Fourier de una función dada. Y estos no son más que un caso particular de la definición anterior.*
2. *La familia* $\{1, cosnx\}_n$ *sobre el intervalo* $[0, \pi]$ *es una familia ortogonal, como ya sabemos. En el ejemplo que sigue veremos como calcular la serie de Fourier de una función respecto de esta familia. Ello no será sino otro caso particular de la definición anterior.*

Ejemplo 1. *Se considera la función* $f(x) = x(\pi - x)$*,* $x \in [0, \pi]$*. Vamos a calcular* ***una*** *serie de Fourier de esta función.*

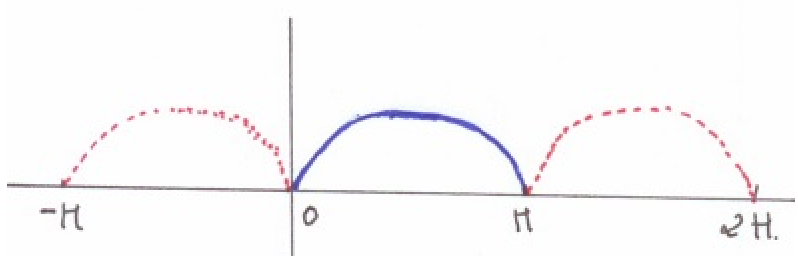

FIGURA 1. f y su extensión.

La gráfica de f en el intervalo $[0, \pi]$ es un arco de parábola y podemos extender esta función de forma π-periódica como se muestra en el dibujo. Como es π-periódica en particular también es 2π-periódica y podríamos calcular su serie de Fourier respecto de la familia $\{1, \cos nx, \operatorname{sen} nx\}_n$ sobre el intervalo $[-\pi, \pi]$ (en este caso observemos que la función sería par y por tanto los coeficientes b_n serían nulos).

No vamos a hacerlo. Vamos a calcular **otra** serie de Fourier, la asociada a la familia $\{1, cosnx\}_n$ sobre el intervalo $[0, \pi]$. Siguiendo la definición previa, ahora los coeficientes de Fourier son:

$$a_0 = \frac{\int_0^\pi f(x)dx}{\int_0^\pi 1^2 dx} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x(\pi - x)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2\pi}{2} - \frac{x^3}{3}\,\middle|\,\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi^3}{2} - \frac{\pi^3}{3}\right] = \frac{3\pi^2}{6} - \frac{2\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}.$$

y

$$a_n = \frac{\int_0^\pi f(x)\cos nx dx}{\int_0^\pi \cos^2 nx dx} \qquad \text{para} \qquad n \geq 1.$$

Recordemos que $\displaystyle\int_0^\pi \cos^2 nx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \cos^2 nx dx = \frac{\pi}{2}$. Luego

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \pi x \cos nx dx - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2 \cos nx dx.$$

Las dos integrales anteriores se resuelven por partes.

$$\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{x \operatorname{sen} nx}{n}\,\bigg|\,\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} \; - \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} nx}{n} dx$$
$$= \frac{-1}{n}\left[\frac{-\cos nx}{n}\,\middle|\,\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix}\right] = \frac{1}{n^2}[\cos n\pi - 1],$$

luego $\displaystyle\int_0^\pi x\cos nx dx = \frac{-2}{n^2}$ si n es impar y cero en otro caso.
La otra integral

$$\int_0^\pi x^2\cos nx dx = \frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n}\,\bigg|\,\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} \; - \frac{2}{n}\int_0^\pi x \operatorname{sen} nx dx$$
$$= \frac{2}{n}\left[\frac{x\cos nx}{n}\,\middle|\,\begin{matrix}\pi\\0\end{matrix} \; - \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} dx\right] = \frac{(-1)^n 2\pi}{n^2}.$$

Así si $n = 2k$ es par, $_n = \dfrac{-2}{\pi}\dfrac{(-1)^n 2\pi}{n^2} = -\dfrac{1}{k^2}$.

Por otro lado si $n = 2k+1$ es impar,

$$a_n = -\frac{4}{(2k+1)^2} + \frac{-2}{\pi}\frac{(-1)^{2k+1}2\pi}{(2k+1)^2} = 0$$

y por tanto la serie de Fourier de la función $f(x) = x(\pi - x)$ respecto de la familia ortogonal $\{\cos nx\}$, con $x \in [0,1]$, es

$$\frac{\pi^2}{6} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\cos 2kx.$$

Ejemplo 2. *Consideremos la función* $f(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \le t \le \pi \\ -1 & si \quad -\pi \le t < 0. \end{cases}$

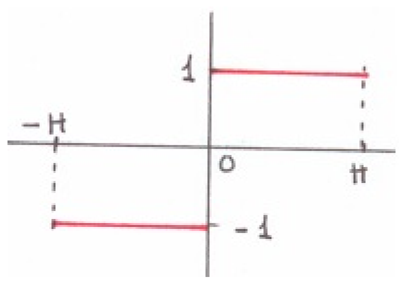

FIGURA 2. Función escalón.

La serie de Fourier de la función f asociada a la familia ortogonal $\{e^{int}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ vendrá dada por unos coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{int}}dt}{\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 dt} \qquad \text{para} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Ahora como $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |e^{int}|^2 dt = 2\pi$ y

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{e^{int}}dt = \int_{-\pi}^{0} -e^{-int}dt + \int_{0}^{\pi} -e^{-int}dt$$
$$= \frac{e^{-int}}{in}\Bigg|_{-\pi}^{0} + \frac{e^{-int}}{-in}\Bigg|_{0}^{\pi}$$
$$= \frac{1}{in}[\cos(-0n) - \cos(n\pi)] + \frac{1}{-in}[\cos(-n\pi) - \cos(0n)] = \frac{2}{in} - \frac{2}{in}\cos n\pi.$$

Así $a_n = \dfrac{2}{in\pi}$ si n es impar y nulo en otro caso. La serie de Fourier de f en esta situación será

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{2}{i(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{-2i}{(2k+1)\pi} e^{i(2k+1)t}.$$

Observación 1. *La forma compleja de la serie de Fourier permite ver más claramente la relación existente entre la serie de Fourier y la transformada de Fourier, la otra gran herramienta del Análisis de Fourier.*

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es