AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

CRITERIOS DE CONVERGENCIA.

Consideremos la familia de funciones $\{1, \cos(\frac{2\pi}{T}nx), \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx)\}_{n\geq 1}$ T-periódicas y ortogonales.

Vamos a dar condiciones suficientes (no necesarias) para que la serie de Fourier de una función f respecto de la familia anterior sea convergente. Además veremos en que condiciones el límite a que converja sea la propia función f. **Puede ocurrir que una serie de Fourier no cenverja y aunque lo haga, su límite no sea el valor correspondiente de** $f(x)$.

Teorema 1. *Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T-periódica, continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en x entonces su serie de Fourier converge puntualmente a $f(x)$, es decir*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx).$$

Otro resultado de este tipo, pero más general en el sentido que no pedimos que la función sea derivable es

Teorema 2. *Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T-periódica, continua a trozos (es decir continua salvo en una cantidad finita de puntos donde tenemos desigualdades de salto). Si en x existen las derivadas laterales $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$, entonces su serie de Fourier converge puntualmente a $\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$, es decir el valor medio entre el límite por la derecha y la izquieda de f en el punto x. Así*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi}{T}nx) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T}nx).$$

Observación 1. *Claramente el primer teorema se deduce del segundo ya que si existe $f'(x)$, entonces f es continua en x y por tanto*

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = f(x)$$

.

Teorema 3. *Si una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es T-periódica, se puede escribir como $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ para $x \in [0, T]$, donde g es una función de cuadrado integrable, es decir $\int_0^T |g(t)|^2 dt < \infty$, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a $f(x)$ sobre $[0, T]$ es decir*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} nx) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} nx).$$

uniformemente sobre $[0, T]$.

Corolario 1. *Si f es T-periódica y su derivada f' es continua en $[0, T]$, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f sobre el intervalo $[0, T]$.*

Teorema 4. *La familia ortogonal $\{1, \cos(\frac{2\pi}{T} nx), \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} nx)\}_{n \geq 1}$ es* ***completa*** *respecto de las funciones de cuadrado integrable, es decir para todo función f que verifica $\int_0^T |f(x)|^2 dx < \infty$, se tiene que*

$$\int_0^T \left| f(x) - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} nx) + b_n \operatorname{sen}(\frac{2\pi}{T} nx) \right) \right|^2 dx \to_{N \to \infty} 0$$

y así según la identidad de Parseval se tiene que

$$\int_0^T |f(x)|^2 dx = (\frac{a_0}{2})^2 T + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n)^2 \frac{T}{2} + (b_n)^2 \frac{T}{2}.$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es