AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EJEMPLOS.

Ejemplo 1. *Se considera la función* $f(x) = x$ *donde* $x \in [-\pi, \pi]$. *Esta función es* 2π*-periódica, impar, continua en* $(-\pi, \pi)$ *y derivable también en el intervalo* $(-\pi, \pi)$.

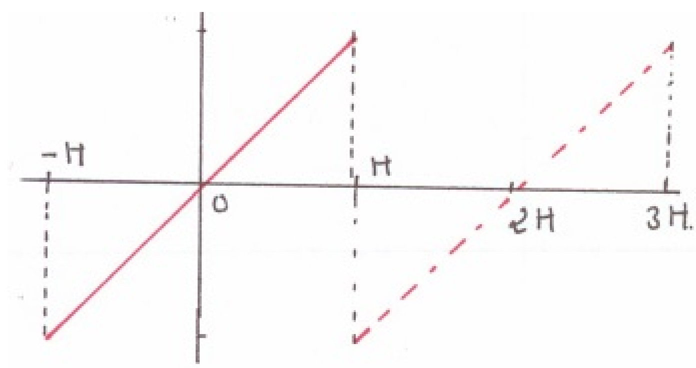

Figura 1. Extensión 2π-peiódica de f.

Vamos a calcular su serie de Fourier. Como es impar, los coeficientes $a_n = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por otro lado, para calcular los coeficientes b_n, integrando por partes

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-x\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\right] \\ &= \frac{-1}{n\pi}[\pi\cos n\pi + \pi\cos n(-\pi)] = \frac{2(-1)^{n+1}}{n}. \end{aligned}$$

Por ser f derivable en $(-\pi, \pi)$ tenemos que la serie de Fourier de f converge puntualmente a f en el intervalo $(-\pi, \pi)$,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} nx \qquad \text{para todo} \qquad x \in (-\pi, \pi).$$

Con los teorema de convergencia podemos dar respuesta a las siguientes preguntas.

1. ¿Qué ocurre en $x = \pi$? Veamos.
   $\lim_{x\to\pi^-} f(x) = f(\pi^-) = \pi$ y $\lim_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi^+) = -\pi$.
   $\lim_{x\to\pi^-} f'(x) = f'(\pi^-) = 1$ y $\lim_{x\to\pi^+} f'(x) = f'(\pi^+) = 1$.
   Luego para $x = \pi$, la serie de Fourier converge a $\dfrac{f(\pi^-) + f(\pi^+)}{2} = \dfrac{\pi - \pi}{2} = 0$. Lo cual es muy fácil de comprobar en este caso
   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\pi = 0$$
2. ¿Qué ocurre para $x = \frac{\pi}{2}$? Aquí la función es derivable y por tanto
   $$\frac{\pi}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \operatorname{sen} n\frac{\pi}{2}.$$
   Si n es par el seno se anula y solo queda
   $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^{2k+2}}{2k+1} \operatorname{sen}(2k+1)\frac{\pi}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{2}.$$
   De lo que se deduce que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.
3. ¿Se puede aplicar en este caso la igualdad de Parceval?
   Por un lado el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que $x = \int_0^x 1dt$; por otro
   $$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi^3}{3}.$$
   Luego se puede aplicar la igualdad de Parseval y usando que $b_n = \dfrac{2(-1)^{n+1}}{n}$, tenemos
   $$\frac{2\pi^3}{3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}\pi.$$
   Simplificando y despejando $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Ejemplo 2. *Consideramos la función $f(x) = x^2$ para $x \in [-\pi, \pi]$. Queremos calcular su serie de Fourier y ver donde esta coincide con los valores de la función.*

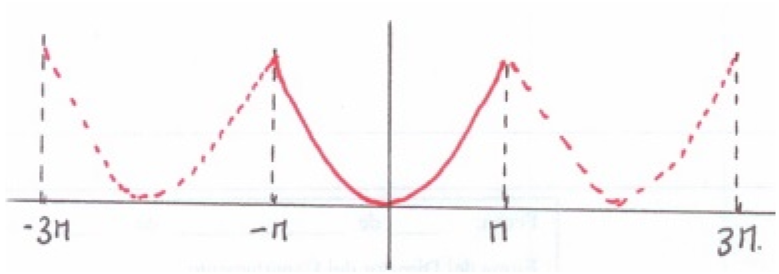

FIGURA 2. Extensión 2π-peiódica de f.

La función f extendida de forma 2π-periódica, como se ve en el dibujo, es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Además es derivable en $x \in \mathbb{R}\backslash\{(2k+1)\pi\}_{k\in\mathbb{Z}}$. Por otro lado, como existen las derivadas laterales en todo punto de $\mathbb{R}$, la serie de Fourier de f converge puntualmente a la función f en todo punto $x \in [-\pi, \pi]$ (en general en cualquier punto de la extensión 2π-periódica).

Vamos a calcular su serie de Fourier. Como la función f es par deducimos que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi}\frac{x^3}{3}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi^2}{3}.$$

Además

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx dx$$

integrando por partes

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2 \operatorname{sen} nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\pi}^{\pi} x \operatorname{sen} nx dx\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(-\operatorname{sen} nx)dx = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{x\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi}\pi(-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n$$

La serie de Fourier de la función es

$$\frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos nx = x^2, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Si particularizamos el valor de la x podemos encontrar la suma de ciertas series númericas. De estas series sabíamos desde primer curso que eran convergente. Ahora podemos decir además cual es su límite. Así si $x = 0$, $\quad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n = 0$ y despejando tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Ahora, si $x = \pi$, $\quad \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}(-1)^n \cos n\pi = \pi^2$ y despejando tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = (\pi^2 - \frac{\pi^2}{3})\frac{1}{4} = \frac{\pi^2}{6}$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`