ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES.

Un tipo importante de sucesiones son las llamadas **sucesiones monótonas.**

Definición. 1. **a:** *Una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *se llama* ***monótona creciente*** *si* $x_n \leq x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b: *Una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *se llama* ***monótona decreciente*** *si* $x_{n+1} \leq x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplos. 1.
- $(2^n)_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión creciente.*
- $(\sqrt[n]{2})_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente.*
- $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ *es una sucesión decreciente.*

Proposición. 1. **a:** *Una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ***monótona creciente*** *que está acotada superiormente tiene límite, de hecho* $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

b: *Una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ***monótona decreciente*** *que está acotada inferiormente tiene límite, de hecho* $\lim_{n\to\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración: Veamos la parte **a)**. Si $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x_n \in \mathbb{R} : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto acotado superiormente, entonces existe α su supremo (por la propiedad del extremo superior de $\mathbb{R}$). Ahora veamos que α es el limite de la sucesión. Dado $\epsilon > 0$, se tiene que $\alpha - \epsilon$ no es supremo y por tanto existe un n_0 de modo que $\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq \alpha$. Ahora como la sucesión es monótona creciente, para todo $n \geq n_0$ se tiene que

$$\alpha - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq \alpha \quad \text{y por tanto} \quad |\alpha - x_n| \leq \epsilon,$$

de lo que sigue que $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

El apartado **b)** se prueba de forma análoga y se deja como ejercicio $\square$

Ejemplos. 2.

- La sucesión $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y como está acotada inferiormente se tiene que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \inf\{\frac{1}{n} \,:\, n \in \mathbb{N}\} = 0.$$
En este caso recuperamos el resultado que ya conocemos.
- La sucesión $(\sqrt[n]{2})_{n=1}^{\infty}$ es monótona decreciente y acotada inferiormente. Claro, $1 < \sqrt[n]{2}$ para todo n y así $2 < 2\sqrt[n]{2} = 2^{\frac{n+1}{n}}$, tomando raíces $n+1-$ésimas $\sqrt[n+1]{2} < \sqrt[n]{2}$. Ya sabemos que esta sucesión tiene límite. Es un poco más complicado ver que vale $1 = \inf \sqrt[n]{2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2}$. Para ver esto, sabemos que 1 es una cota inferior de la sucesión. Procedemos por reducción al absurdo. Supongamos que el límite es $(1+\epsilon)$ con $\epsilon > 0$. Entonces por un lado, $(1+\epsilon) \le \sqrt[n]{2}$ (es decir $(1+\epsilon)^n \le 2$) para todo n y por otro, usando el **binomio de Newton**,
$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k 1^{n-k} > 1 + n\epsilon.$$
Esta última expresión no está acotada por la propiedad arquimediana de $\mathbb{R}$.
- Si $r \in \mathbb{R}$ y $r \ge 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{r} = 1$. La prueba es análoga a la anterior y se deja como ejercicio.

Un caso importante en él que se aplica la Proposición anterior es nuestro proceso de aproximación del número $\sqrt{2}$.

Ejemplo. 1. *Sea la sucesión recurrente $x_0 = 2$ y*
$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}.$$
Esta sucesión es convergente.

Demostración: Vamos a ver que la sucesión es monótona y acotada. En primer lugar veamos que $\sqrt{2} \le x_n \le 2$ para todo n. Para $n = 0$ es claro. Ahora
$$\frac{x_n^2 + 2}{2x_n} \ge \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_n^2 + 2 \ge 2x_n\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow \quad x_n^2 + 2 - 2x_n\sqrt{2} = (x_n - 2)^2 \ge 0$$
Lo que prueba la primera desigualdad. Para ver la segunda, supongamos (hipótesis de inducción) que $\sqrt{2} \le x_n \le 2$, entonces
$$x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} \le \frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \le 2,$$
lo que prueba la segunda desigualdad.

Solo nos queda ver que la sucesión es decreciente, para ello ponemos

$$x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n} - x_n = \frac{1}{x_n} - \frac{x_n}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

□

En este último ejemplo conocemos que la sucesión tiene límite, pero no cuál es explícitamente. Las siguientes propiedades de los límites de sucesiones respectos de las operaciones nos resolverá este problema pendiente.

OPERACIONES CON SUCESIONES.

Definición. 2. *Dadas dos sucesiones de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$*, junto con un escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$*, se difinen:*

la suma de sucesiones: $(x_n)_{n=1}^{\infty} + (y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$;
el producto por un escalar: $\lambda(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\lambda x_n)_{n=1}^{\infty}$;
el producto de sucesiones: $(x_n)_{n=1}^{\infty}(y_n)_{n=1}^{\infty} = (x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$;
la sucesión cociente: $\frac{1}{(x_n)_{n=1}^{\infty}} = (\frac{1}{x_n})_{n=1}^{\infty}$, *siempre que* $x_n \neq 0$ *para todo* n.

Las operaciones anteriores se comportan respecto del límite de la siguiente manera.

Proposición. 2. *Dadas dos sucesiones de números reales* ***convergentes*** $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$*, junto con un escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$*, de modo que* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim_{n\to\infty} y_n = y$*, entonces*

- *existe* $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$;
- *existe* $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x$;
- *existe* $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$;
- *existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$*, siempre que* $y \neq 0$.

Antes de hacer la prueba veamos algunos ejemplos.

Ejemplos. 3.

- $(\dfrac{2n}{n+1})_{n=1}^{\infty} = (\dfrac{2}{1+\frac{1}{n}})_{n=1}^{\infty} \to_{n\to\infty} 2$, *ya que la suma de funciones convergente da* $1 + \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 1 \neq 0$*, y así el cociente de sucesiones con denomidador de límite no nulo nos da el resultado.*
- *Sea* $x_0 = 2$ *y la sucesión* $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \dfrac{x_n^2+2}{2x_n}$*, para todo* $n \geq 1$*. Sabemos que existe* $\lim_{n\to\infty} x_n = l = \inf\{x_n \;:,\; n \geq 0\} \geq \sqrt{2}$*. Por tanto si aplicamos límites a ambos lados de la igualdad*

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n},$$

según las propidades de arriba, tendremos que

$$l = l - \frac{l^2 - 2}{2l.}$$

Despejando l*, tenemos la ecuación* $2l^2 = 2l^2 - l^2 + 2$*, simplificando* $l^2 = 2$*, luego* $l = \sqrt{2}$*.*

Observación. 1. *Para calcular el límite de esta última sucesión, un algoritmo par aproximar el número* $\sqrt{2}$ *por números racionales y operaciones elementales, hemos necesitado: el principio de inducción, la definición de ínfimo, el concepto de convergencia y las propiedades de las sucesiones.*

Demostración: (**de la Proposición**).

- Existe $\lim_{n\to\infty} x_n + y_n = x + y$. Sea $\epsilon > 0$, entonces, por la definición de límite, para
  $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$,
  $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe n_1 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2}$.
  Tomemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, entonces si $n > n_2$, se tiene que
  $$|(x_n + y_n) - (x + y)| \leq |x_n - x| + |y_n - y| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$
  Lo que prueba la existencia de nuestro límite.
- Existe $\lim_{n\to\infty} \lambda x_n = \lambda x$, **ejercicio.**
- Existe $\lim_{n\to\infty} x_n y_n = xy$. Hagamos primero una tentativa para saber que es lo que vamos a necesitar.
  $$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy_n + xy_n - xy|$$
  $$\leq |x_n y_n - xy_n| + |xy_n - xy| = |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y|.$$
  Ahora, como $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente, está acotada, es decir existe $M > 0$ de modo que $|y| \leq M$ para todo n. Dado $\epsilon > 0$, entonces
  para $\frac{\epsilon}{2M} > 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2M}$,
  para $\frac{\epsilon}{2(|x|+1)} > 0$, existe n_1 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|y_n - y| < \frac{\epsilon}{2(|x|+1)}$.
  Tomemos $n_2 = \max\{n_0, n_1\}$, entonces si $n > n_2$, se tiene que
  $$|x_n y_n - xy| \leq |y_n||x_n - x| + |x||y_n - y| < M\frac{\epsilon}{2M} + |x|\frac{\epsilon}{2(|x| + 1)} \leq \epsilon.$$
  Lo que prueba la existencia de nuestro límite.
- Existe $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$, siempre que $y \neq 0$. Por la propiedad anterior, solo tenemos que probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{y}$, siempre que $y \neq 0$.

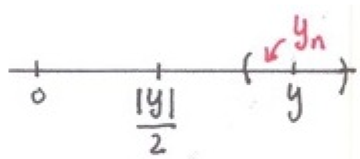

FIGURA 1. Límite no nulo.

Dado $\epsilon > 0$,
tomando $\frac{|y|}{2} > 0$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|y_n| \geq \frac{|y|}{2}$, tomando $\frac{\epsilon |y|^2}{2} > 0$, existe n_1 tal que para todo $n > n_0$ se tiene $|y_n - y| < \frac{\epsilon|y|^2}{2}$. Tomemos $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, entonces si $n > n_2$, se tiene que

$$|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{y}| = |\frac{y - y_n}{y_n y}| \leq \frac{|y - y_n|}{|y||y_n|} \leq \frac{2|y - y_n|}{|y|^2} < \epsilon$$

□

Ejemplos. 4.

- $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n} - 1}{2\sqrt{n} + 2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n}-1}{\sqrt{n}}}{\frac{2\sqrt{n}+2}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}}{2 + \frac{2}{\sqrt{n}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *ya que* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{n^2}{6n^2+2}, \frac{n^2}{3n^2+1}]$. *Tenemos que*
  - $\frac{n^2}{6n^2+2} = \frac{1}{6 + \frac{2}{n^2}} \uparrow_{n\to\infty} \frac{1}{6}$, *y*
  - $\frac{n^2}{3n^2+2} = \frac{1}{3 + \frac{1}{n^2}} \uparrow_{n\to\infty} \frac{1}{3}$,

  donde el símbolo $\uparrow$ *indica que la sucesión converge de forma creciente. Luego para todo* $n \geq 1$ *se tiene que*

$$\frac{1}{8} \leq \frac{n^2}{6n^2+2} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} \leq \frac{n^2}{3n^2+2} < \frac{1}{3}.$$

Como la unión es el conjunto de los elementos incluidos en algún conjunto de los que se unen, deducimos que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{n^2}{6n^2+2}, \frac{n^2}{3n^2+1}] = [\frac{1}{8}, \frac{1}{3}).$$

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`