ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

OTRAS PROPIEDADES DE LAS SUCESIONES CONVERGENTES.

A continuación presentaremos algunas propiedades adicionales de las sucesiones en relación con la convergencia. En primer lugar una mirada detenida a la definición de límite de una sucesión nos dice que:

Observación. 1. $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *si y solo si* $\lim_{n\to\infty} |x_n - x| = 0$.

Lema. 1. *Para todo par de números reales* $x, y \in \mathbb{R}$ *se tiene que*

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|.$$

Demostración:

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, \quad \text{luego} \quad |x| - |y| \leq |x - y|$$

De forma análoga,

$$|y| = |y - x + x| \leq |y - x| + |x|, \quad \text{luego} \quad |y| - |x| \leq |y - x|$$

y por tanto

$$|\,|x| - |y|\,| \leq |x - y|.$$

□

Observación. 2. *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x|$.

Demostración: De los dos resultados anteriores se sigue que

$$|\,|x_n| - |x|\,| \leq |x_n - x| \to_{n\to\infty} 0.$$

□

Proposición. 1. **a:** *Toda sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergente es acotada, es decir existe* $M > 0$ *de modo que* $|x_n| < M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

b: *Dadas dos sucesiones de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *convergentes de modo que* $x_n \le y_n$ *para todo* n, *se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \le y = \lim_{n\to\infty} y_n.$$

c: *Dadas tres sucesiones de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ *y* $(z_n)_{n=1}^{\infty}$, *de modo que*

$$x_n \le y_n \le z_n \qquad \text{para todo} \quad n$$

y con

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a = \lim_{n\to\infty} z_n,$$

entonces existe $\lim_{n\to\infty} y_n = a$

Demostración:

a: Sea $x = \lim_{n\to\infty} x_n$, y tomemos $\epsilon = 1$, entonces existe n_0 de modo que para todo $n \ge n_0$ se tiene que $|x_n - x| < 1$ y por tanto casi todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo de cento x y radio 1, $x_n \in (x-1, x+1)$. Tomemos

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots |x_{n_0}|, |x-1|, |x+1|\},$$

entonces ya es claro que $|x_n| < M + 1$ para todo n.

b: Supongamos que $y < x$, el siguiente dibujo nos convence que esto no puede ser

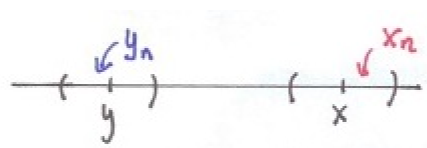

FIGURA 1. Separación de puntos por intervalos abiertos.

Como $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado solo es posible que $x \le y$.

c: Dibujamos la situación del enunciado.

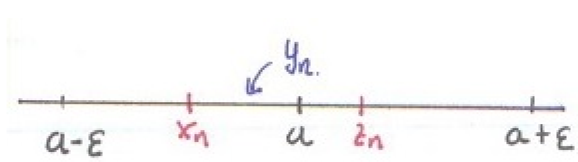

FIGURA 2. Teorema del sándwich.

Ahora vamos a transcribir el dibujo. Dado $\epsilon > 0$ existen

$$n_0 \quad \text{de modo que si} \quad n \geq n_0 \quad \text{entonces} \quad |x_n - a| < \epsilon$$

y

$$n_1 \quad \text{de modo que si} \quad n \geq n_1 \quad \text{entonces} \quad |z_n - a| < \epsilon.$$

Sea $n_2 = \text{máx}\{n_0, n_1\}$, entonces para todo $n \geq n_2$ se tiene que $x_n, z_n \in (a - \epsilon, a + \epsilon)$. Podemos escribir para todo $n \geq n_2$ que

$$a - \epsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \epsilon,$$

y por tanto $|y_n - a| < \epsilon$. Por definición de límite, $a = \text{lím}_{n\to\infty} y_n$

□

Ejemplo. 1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{(n^2+1)} + \frac{n-1}{(n^2+2)} + \cdots + \frac{n-1}{(n^2+n)}.$

Demostración: Para calcular este límite nos fijamos en que

$$n\frac{n-1}{(n^2+n)} \leq \frac{n-1}{(n^2+1)} + \frac{n-1}{(n^2+2)} + \cdots + \frac{n-1}{(n^2+n)} \leq n\frac{n-1}{(n^2+1)},$$

ya que $\frac{n-1}{(n^2+n)}$ es el menor de los n sumandos y $\frac{n-1}{(n^2+1)}$ es el mayor. Ahora como

$$\lim_{n\to\infty} n\frac{n-1}{(n^2+n)} = 1 = \lim_{n\to\infty} n\frac{n-1}{(n^2+n)},$$

tenemos que nuestro límite, que está entre medias, también vale uno

□

Cálculo de límites. Las propiedades que hemos visto así como otras manipulaciones "adecuadas", son las herramientas que tenemos por el momento para calcular límites de sucesiones.

Ejemplos. 1.

- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n+7}{2n^3+n^2+1} = \frac{3}{2}.$
- $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0.$

Demostración:

- La sucesión del numerador no está acotada, $3n^3+n+7 > n$. Lo mismo le pasa al denominador, ambas son sucesiones **no** convergentes. Luego no podemos usar el resultado sobre el límite del cociente de sucesiones convergentes. Podemos hacer otra cosa:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^3+n+7}{2n^3+n^2+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3n^3+n+7}{n^3}}{\frac{2n^3+n^2+1}{n^3}}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3 + \frac{1}{n^2} + \frac{7}{n^3}}{2 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = \frac{3}{2},$$

donde en la última igualdad ya si hemos usado los resultados sobre operaciones con límites.

- Las sucesiones $(\sqrt{n+1})_{n=1}^{\infty}$ y $(\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ no están acotadas, no son convergentes. Luego no podemos usar que el límite de una diferencia es la diferencia de los límites (por que no existen). En este caso manipulamos de la siguiente manera,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0,$$

ya que $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \to_{n\to\infty} 0$

□

Límites infinitos. En el último ejemplo hemos visto que la suceción $(\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$, que no está acotada, al tomar su cociente tiende a cero. Esto es un hecho general que veremos a continuación.

Definición. 1. *Dada una sucesión de número reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ decimos que,*

- *la sucesión converge a infinito,* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, *si para todo $M > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n| > M$;*
- *la sucesión converge a menos infinito,* $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$, *si para todo $N < 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, de modo que para todo $n \geq n_0$ se tiene que $|x_n| < N$;*

Ejemplos. 2. *Las siguientes sucesiones convergen a infinito o menos infinito, dejamos como ejercicio el determinar la opción exacta en cada caso:*

$$(n)_{n=1}^{\infty}; \quad (2^n)_{n=1}^{\infty}; \quad (x^n)_{n=1}^{\infty},\ x>1; \quad (-\sqrt{n})_{n=1}^{\infty} \quad y \quad (\frac{1-n^2}{n+1})_{n=1}^{\infty}.$$

Demostración: En el caso $(x^n)_{n=1}^{\infty}, \quad x > 1$, podemos escribir $x = 1+\epsilon$, usando el binomio de Newton, tenemos que

$$(1+\epsilon)^n = \sum_{k=0}^{n} \left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array} \right) \epsilon^k \geq 1 + n\epsilon \to_{n\to\infty} \infty,$$

donde al final hemos usado la propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$ □

Proposición. 2. *Si la sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ converge a infinito o menos infinito, entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$.

Demostración: Lo que queremos probar es que si en un cociente $\frac{1}{x_n}$ el denominar se hace muy grande en valor absoluto, $|x_n| \to_{n\to\infty} \infty$, entonces el cociente se hace muy pequeño, tiende a cero. Veámoslo. Sea $\epsilon > 0$, existe n_0 de modo que para todo $n \geq n_0$ tenemos que $|x_n| > \frac{1}{\epsilon}$ y por tanto $|\frac{1}{x_n}| < \epsilon$. Lo que prueba que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$ $\square$

Ejemplo. 2. $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, *si* $|x| < 1$.

Demostración: El caso $x = 0$ es claro. En otro caso $|\frac{1}{x}| > 1$, y así $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{|x|})^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|x_n|^n} = \infty$. Luego por la Proposición anterior

$$\frac{1}{\frac{1}{|x|^n}} = |x|^n \to_{n\to\infty} 0$$

$\square$

Otros límites que debemos conocer y que aparecen con cierta frecuencia son:

Ejemplos. 3.
- *Si* $p > 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$*;*
- *Si* $p > 0$, *entonces* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$*;*
- $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$*;*
- $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$*.*

Demostración: La demostración de estos límites se hace usando las técnicas y "trucos" vistos anteriormente. El caso $(\,(1 + \frac{1}{n})^n\,)_{n=1}^{\infty}$ es él de una sucesión creciente y acotada (ver Hoja de Problemas), y por tanto convergente. A su límite lo llamamos número e. Este es un famoso número real, aparece en muchos cálculos. De la prueba de la existencia de e, se ve que $2 < e < 3$. $\square$

Ejercicio. 1. $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+3})^{\frac{n}{3}} = \sqrt[3]{e}$.

Demostración: $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+3})^{\frac{n}{3}} = \lim_{n\to\infty}(\,(1 + \frac{1}{n+3})^{n+3-3}\,)^{\frac{1}{3}}$

$$= \lim_{n\to\infty}(\,(1 + \frac{1}{n+3})^{(n+3)}\,)^{\frac{1}{3}} \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n+3})^{\frac{-3}{3}} = e^{\frac{1}{3}} \times 1$$

$\square$

El cálculo de límites de sucesiones puede llegar a ser muy artesanal. Sin embargo cuando estudiemos funciones tendremos una potente herramienta para hacerlo. Probaremos que:

Proposición. 3. *Sea una sucesión de número reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *de modo que existe una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *para la cuál* $f(n) = n$*, para todo natural* n*.*

Entonces si existe $\lim_{x\to\infty} f(x)$, *incluso si es más o menos infinito, se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{x\to\infty} f(x).$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es