ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

SUBSUCESIONES.

Las sucesiones convergentes son acotadas, como hemos visto. El recíproco no es cierto. No toda sucesión acotada es covergente.

Ejemplo. 1. *Sea la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, donde* $x_n = (-1)^n$*. Esta sucesión toma alternativamente los valores* -1 *y* 1*. Por tanto no puede ser convergente, aunque claramente esta acotada.*

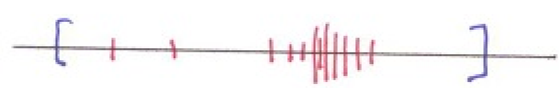

FIGURA 1. .

De todas formas, si "encerramos " mucho números en un espacio finito, como en el ejemplo o en el dibujo anteriores, algunos de estos puntos tienden a juntarse en algún punto. Esta idea la atrapamos matemáticamente con la noción de **subsucesión**.

Definición. 1. *Dada una sucesión de números reales*

$$(x_n)_{n=1}^{\infty} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1} \ldots\} \subset \mathbb{R},$$

se llama ***subsucesión*** *de la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$*, a todo subconjunto infinito de la sucesión*

$$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots x_{n_k}, \ldots\},$$

de modo que se conserva el orden relativo de la sucesión, es decir

$$n_1 < n_2 < \ldots < n_k < n_{k+1} < \ldots$$

Observación. 1. *Formalmente, dada una sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *y una aplicación creciente* π

$$\begin{array}{cccc} \pi & : & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{N} \\ & & k & \rightarrow & \pi(k) = n_k \end{array}$$

a la selección de términos de la sucesión $(x_{\pi(k)})_{k=1}^{\infty} = (x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *se le llama subsucesión de de la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$.

Claramente una subsucesión es a su vez otra sucesión.

Ejemplos. 1.
- *Sea la sucesión* $(\frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$. *La sucesión* $(\frac{1}{2k})_{k=1}^{\infty}$ *es una subsucesión de la primera. además como la primera converge la subsucesión también y lo hace al mismo límite.*
- $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\,(-1)^n\,)_{n=1}^{\infty}$. *Si tomamos la subsesión* $(\,(-1)^{2k+1}\,)_{k=0}^{\infty}$, *esta nueva sucesión es constantemente igua a* -1 *y por tanto la subsucesión converge a* -1, *mientras que la sucesión de partida no lo hacía.*
- *Dada la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *consideramos la subsucesión* $(x_{3k+1})_{k=1}^{\infty}$, *donde la selección de términos de la sucesión la hacemos del siguiente modo*

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & \ldots & 3k-1 & 3k & 3k+1 & \ldots \\ & & & \uparrow & & & \uparrow & & & & \uparrow & \end{array}.$$

Proposición. 1. *Sea una sucesión de números reales* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. *Son equivalentes:*

a: *Existe* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

b: *Toda subsucesión* $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *de la sucesión es convergente a un mismo límite* x.

Demostración: Ejercicio. $\square$

Ejercicio. 1. *De la sucesión siguiente hay que determinar ¿si está acotada? ¿Si es convergente? ¿Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$*? Y también, encontrar una subsucesión convergente especificando su límite.*

$$x_n = \begin{cases} \frac{(-1)^n n}{n+1} & si \quad n = 3k \quad con\ k \in \mathbb{N} \\ \sqrt{n+1} - \sqrt{n} & si \quad n = 3k+1 \quad con\ \ k \in \mathbb{N} \\ \frac{1}{1 - x_{n-2} + x_{n-1}} & si \quad n = 3k+2 \quad con\ \ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Demostración: Esta sucesión viene dada por tres subsucesiones. Será suficiente con estudiar cada una de ellas.

- $|\dfrac{(-1)^n n}{n+1}| \leq 1$. Esta subsucesión está acotada, pero toma alternativamente valores positivos y negativos, luego no es convergente. Observemos que al menos una subsucesión suya es convergente,

$$\lim_{l\to\infty} \frac{(-1)^{6l} 6l}{6l+1} = 1.$$

- $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$, como hemos visto anteriormente, por tanto
$$\lim_{l\to\infty} \sqrt{3l+1+1} - \sqrt{3l+1} = 0$$
dado que es una subsucesión de la anterior.
- Si $n = 3k+2$, entonces
$$\frac{1}{1 - x_{n-2} + x_{n-1}} = \frac{1}{1 - x_{3k} + x_{3k-1}} = \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{3k}3k}{3k+1} + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})}$$
si $k = 2l$
$$\geq \frac{1}{1 - \frac{(-1)^{6l}6l}{6l+1}} \to_{l\to\infty} \infty,$$
ya que el denominador de la última fracción tiende a cero.

Resumiendo la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada, por tanto no es convergente. Tiene distintas subcesiones convergentes, a 0 y 1, por ejemplo. Por tanto tampoco converge a infinito o menos infinito. Sin embargo si tiene al menos una subsucesión convergente a infinito. $\square$

Aplicaciones de las subsucesiones. el concepto de subsucesión tiene importantes aplicaciones teóricas dentro del Análisis Matemático. Estas aplicaciones las utilizaceros posteriormente.

En primer lugar veamos que una colección infinita de puntos acotados necesariamente se tienen que comprimir en algún punto.

Teorema. 1. *(**de Bolzano-Weierstrass**). Sea una sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ acotada. Entonces al menos existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ convergente.*

Demostración: Veamos la estructura de la demostración.

Por estar la sucesión acotada existe $M > 0$ de modo que $|x_n| < M$, para todo n.

Se definene los conjuntos
$$A_j = \{x_n \quad : \quad n \geq j\} \quad \text{para todo} \quad j = 1, 2, \ldots.$$
Estos conjuntos están todos ellos acotados y por tanto existe para cada j $\sup A_j = a_j \in \mathbb{R}$.

Si consideramos la sucesión $(a_j)_{j=1}^{\infty}$, está es decreciente y acotada. Es claro que $|a_j| \leq M$ para todo j y que es decreciente se ve ya que $A_{j+1} \subset A_j$ para cada j.

Sea $\lim_{j\to\infty} a_j = a$. Ahora, y estos es lo más engorroso, se puede probar que existe una subsucesión

$$(x_{n_k})_{k=1}^{\infty} \to_{k\to\infty} a$$

$\square$

Observación. 2. *Si $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión no acotada, entonces existe una subsucesión $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ con límite infinito o menos infinito.*

Demostración: Supondremos que $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ no está acotada superiormente (el caso de que no lo esté inferiormente se deja como ejercicio). Luego para

$$k = 1, \quad \text{existe} \quad x_{n_1} \quad \text{de modo que} \quad 1 < x_{n_1}.$$

$$k = 2, \quad \text{existe} \quad x_{n_2},\ n_2 > n_1 \quad \text{de modo que} \quad 2 < x_{n_2}.$$

$\vdots$

$$k \in \mathbb{N}, \quad \text{existe} \quad x_{n_k},\ n_k > n_{k-1} > \ldots > n_2 > n_1, \quad \text{de modo que} \quad k < x_{n_k}.$$

Observemos que esta término x_{n_k} de la sucesión existe pués de otro modo la sucesión estaría acotada.

Así por recurrencia construimos una subsucesión

$$x_{n_k} \geq k \to_{k\to\infty} \infty$$

$\square$

Definición. 2. *Una sucesión de números reales se llama de **Cauchy** si para todo $\epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que para todo $n, m \geq n_0$ se tiene que*

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Como vemos ésta es una definición muy parecida a la de sucesión convergente. En este caso no hacemos mención al algo fuera de al sucesión, el límite, solo contamos con información intrinseca de la sucesión.

Lo que vamos a ver es que las sucesiones de Cauchy y las sucesiones convergentes son las mismas en $\mathbb{R}$. Lo cuál nos da otro criterio para saber si una sucesión es convergente o no: ser de Cauchy.

Teorema. 2. *(**de completitud de** $\mathbb{R}$). Toda sucesión de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es convergente si y solo si es de Cauchy.*

Demostración:

- Supongamos que $(x_n)_{n=1}^{\infty} \to_{n\to\infty} x$ es convergente. Entonces dado $\epsilon > 0$, si consideramos $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existe un n_0 de modo que si $n \geq n_0$, entonces $|x_n - x| < \frac{\epsilon}{2}$. Tomemos ahora $n, m \geq n_0$, entonces

$$|x_n - x_m| = |x_n - x + x - x_m| \leq |x_n - x| + |x - x_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

  Luego la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.
- Supongamos ahora que la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy.

  Lo primero que vemos es que la sucesión esta acotada. Para ello tomemos $\epsilon = 1$, y así vemos que para cierto n_0 se tiene que $|x_n - x_m| < 1$, si $n, m \geq n_0$. Si tomamos

$$M = \text{máx}\{\, |x_1|, |x_2|, \ldots |x_{n_0-1}||x_{n_0}| + 1|, ||x_{n_0}| - 1|\,\}$$

  es claro que M acota a la sucesión en valor absoluto.

  Ahora como la sucesión está acotada y por el Teorema de Bolzano-Weierstrass, existe una subsucesión convergente

$$x_{n_k} \to_{k\to\infty} x.$$

  Veamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Tomemos $\frac{\epsilon}{2} > 0$, existen un n_0 y k_0 de modo que que si $n, m \geq n_0$ y $n_k \geq n_{k_0}$ se tiene que

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{y} \quad |x_{n_k} - x| < \frac{\epsilon}{2}$$

  respectivamente. Por tanto para todo $n \geq \text{máx}\{\, n_0, n_{k_0}\,\}$ se tiene que

$$|x_n - x| = |x_n - x_{n_{k_0}} + x_{n_{k_0}} - x| \leq |x_n - x_{n_{k_0}}| + |x_{n_{k_0}} - x| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

$\square$

Ejemplo. 2. *Sea la sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ dada por $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ y $x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$ si $n \geq 3$. Veamos que esta sucesión es de Cauchy y por tanto convergente.*

Demostración: Observemos que el término $x_n = \dfrac{x_{n-2} + x_{n-1}}{2}$ es el punto medio entre x_{n-2} y x_{n-1}. Así $x_{n+k} \in [x_n, x_{n+1}]$ o $[x_{n+1}, x_n]$. Luego

$$|x_{n+k} - x_n| \leq |x_{n+1} - x_n| = |\frac{x_n + x_{n-1}}{2} - x_n|$$

$$= \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| = \frac{1}{2^2}|x_{n-1} - x_{n-2}| = \cdots = \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| \to_{k\to\infty} 0,$$

lo que prueba que la sucesión es de Cauchy y por tanto convergente. $\square$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es