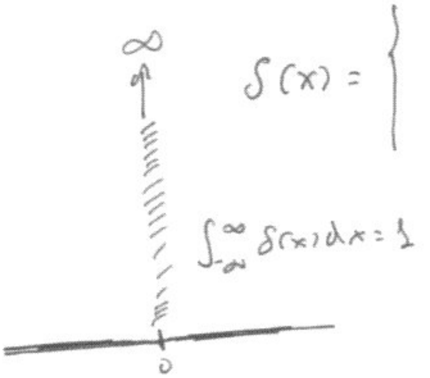
LA FUNCIÓN δ DE DIRAC

La función delta de Dirac δ es un objeto matemático con las siguientes propiedades.



$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{y tal que} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = 1$$

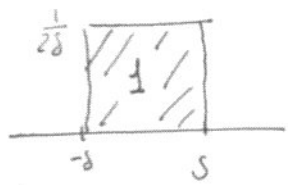
$\boxed{\delta \text{ no es una función al uso}}$

Matemáticamente es una distribución y todo lo que sigue se puede probar con teoría de distribuciones que queda fuera de nuestro alcance.

¿De dónde sale esta función δ?

Vamos a considerar señales que en un intervalo corto de tiempo presentan la misma energía (1 unidad)

$$f_\delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\delta}\chi_{[-\delta,\delta]}(t) = \frac{1}{2\delta} & \text{si } t \in [-\delta,\delta] \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



Así si $\delta \to 0$ $\quad f_\delta(t) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{si } t = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

con convergencia puntual

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(t)\,dt = 1, \quad \text{y si fuese cierto que}$$

$$\boxed{1 = \lim_{\delta \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(t)\,dt \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt.}$$

Nos salen las propiedades matemáticas de la δ de Dirac ó impulso unitario (hay que entenderlo como un impulso instantáneo de energía 1).

DEF $\delta_a(t) = \delta(t-a)$ $\quad t \in \mathbb{R}$. Impulso unitario en el momento a.

AM

PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN IMPULSO

- $\hat{\delta}(s) \equiv 1$, YA QUE $\hat{\delta}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-ist} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$

- $\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} ds$, POR EL TEOREMA DE INVERSIÓN.

- $F[\cos w_0 t](s) = \pi \delta(s - w_0) + \pi \delta(s + w_0) = \pi \delta_{w_0}(s) + \pi \delta_{-w_0}(s)$

DEM COMO $\cos w_0 t = \frac{1}{2}\left(e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t}\right)$

$F\{\cos w_0 t\}(s) = F\{\tfrac{1}{2}(e^{iw_0 t} + e^{-iw_0 t})\}(s) = \tfrac{1}{2} F\{e^{iw_0 t}\}(s) + \tfrac{1}{2} F[e^{-iw_0 t}](s) =$

$= \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(w_0 - s)t} dt + \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it(w_0+s)} dt \underset{\delta(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} ds}{=}$

$= \pi \delta(w_0 - s) + \pi \delta(-(w_0 + s)) = \pi \delta(s - w_0) + \pi \delta(s + w_0).$

- $f * \delta(\tau) = f(\tau)$ Y POR TANTO $f * \delta_{w_0}(\tau) = f(\tau + w_0)$

DEM $f * \delta(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(\tau - s) ds \underset{\delta(\tau - s) = 0 \ \forall s \neq \tau}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \delta(\tau - s) ds = f(\tau) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - s) ds = f(\tau)$

DE LA MISMA FORMA

$f * \delta_{w_0}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) \delta(\tau - s + w_0) ds \underset{\delta(\tau - s + w_0) = 0 \text{ si } s \neq \tau + w_0}{=} f(\tau + w_0).$

- SEA $f(t)$ UNA SEÑAL Y SEA $\cos w_0 t$ UNA SEÑAL DE FRECUENCIA ÚNICA $\frac{w_0}{2\pi}$, ENTONCES

$F[f(t) \cdot \cos w_0 t](s) = \frac{1}{2}[\hat{f}(s + w_0) + \hat{f}(s - w_0)].$

DEM $F[f(t) \cdot \cos w_0 t](s) \underset{\text{PROPIEDAD DE LA TRANSFORMADA Y LA CONVOLUCIÓN}}{=} \frac{1}{2\pi} \hat{f} * \widehat{\cos w_0 t}(s) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{f} * (\pi \delta_{w_0}(s) + \pi \delta_{-w_0}(s))\right) =$

$= \tfrac{1}{2} \hat{f} * \delta_{w_0}(s) + \tfrac{1}{2} \hat{f} * \delta_{-w_0}(s) = \tfrac{1}{2} \hat{f}(s + w_0) + \tfrac{1}{2} \hat{f}(s - w_0)$

OBSERVACIÓN: LAS FORMULAS Y "DEMOSTRACIONES" ANTERIORES TIENEN SENTIDO EN LA TEORÍA DE DISTRIBUCIONES; AQUÍ SOLO SUPONEN UN CÁLCULO FORMAL

OBSERVACIÓN: LA PROPIEDAD $F\{f(t)\cos w_0 t\}(s) = \tfrac{1}{2}\{\hat{f}(s + w_0) + \hat{f}(s - w_0)\}$ ES ESENCIAL EN LA MODULACIÓN EN AMPLITUD DE SEÑALES.