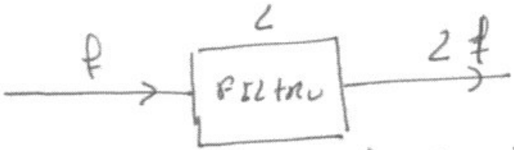
APÉNDICE: FILTROS LINEALES

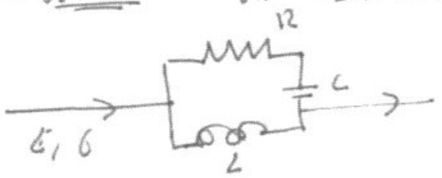
VAMOS A ESTUDIAR DE FORMA ABSTRACTA LOS FILTROS CON PROPIEDADES LINEALES. COMO APLICACIÓN VEREMOS QUE NO SE PUEDE CONSTRUIR FÍSICAMENTE UN FILTRO ANALÓGICO IDEAL PASO BAJO

UN FILTRO LINEAL ES UN SISTEMA L POR EL QUE ENTRAN SEÑALES Y ESTE DEVUELVE OTRA SEÑAL



DE MODO QUE $\left\{ \begin{array}{l} L[f+g] = L[f] + L[g] \\ \text{y } L[cf] = cL[f] \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ y } \forall f, g \text{ SEÑALES.} \end{array} \right.$

EJEMPLO UN CIRCUITO RLC. DADAS E Y G DOS SEÑALES LAS SALIDAS RESPECTIVAS V_0 Y V_1 VERIFICAN



$$E(t) = A V_0(t) + B V_0'(t) + C V_0''(t)$$
$$c\,G(t) = cA V_1(t) + cB V_1'(t) + cC V_1''(t)$$

$$\text{y } (E + cG)(t) = A(V_0 + cV_1)(t) + B(V_0 + cV_1)'(t) + C(V_0 + cV_1)''(t)$$

DEFINICIÓN UNA TRANSFORMACIÓN L (QUE TRANSFORMA SEÑALES EN SEÑALES) SE DICE QUE ES INVARIANTE POR EL TIEMPO SI PARA TODA SEÑAL f Y $\forall a \in \mathbb{R}$ Y PARA $f_a(t) = f(t-a)$ SE TIENE QUE

$$L[f_a](t) = Lf(t-a) \quad (\text{ó } L[f_a] = (Lf)_a)$$

OBSERVACIÓN: LA DEFINICIÓN ANTERIOR, SIRVE PARA INDICAR LOS SISTEMAS CUYA RESPUESTA ES INDEPENDIENTE DEL MOMENTO EN QUE ENTRA LA SEÑAL

EJEMPLO - UN CIRCUITO RLC YA QUE

$$E_a(t) : E(t-a) = A V_{0,a}(t) + B V_{0,a}'(t) + C V_{0,a}''(t)$$

DONDE $V_0(t)$ ES LA RESPUESTA DEL SISTEMA A LA ENTRADA $E(t)$

EJEMPLO SEA ℓ UNA FUNCIÓN CON SOPORTE FINITO.

Y SEA $(Lf)(s) \underset{DEF}{=} (\ell * f)(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(s-x) f(x)\,dx$

ESTE ES UN FILTRO LINEAL (ES LA CONVOLUCIÓN, LUEGO ES CLARO) E INVARIANTE POR EL TIEMPO YA QUE:

$$Lf(s-a) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(s-a-x) f(x)\,dx \underset{y=a+x}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \ell(s-y) f(y-a)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(s-y) f_a(y)\,dy$$
$$= L[f_a](s)$$

VAMOS A VER QUE TODO FILTRO LINEAL E INVARIANTE VIENE DADO POR UNA CONVOLUCIÓN.

LEMA SI L ES UN FILTRO LINEAL E INVARIANTE Y $\lambda \in \mathbb{R}$, EXISTE h UNA FUNCIÓN INTEGRABLE TAL QUE

$$L(e^{i\lambda t}) = \tilde{h}(\lambda)\, e^{i\lambda t}, \quad \text{PARA CIERTA } \tilde{h}$$

DEM SEA $h^{\lambda}(t) = L(e^{i\lambda t})$. POR SER L INVARIANTE TENEMOS QUE $L[e^{i\lambda(t-a)}] = h^{\lambda}_a(t-a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

POR SER LINEAL

$$L[e^{i\lambda(t-a)}] = e^{-i\lambda a} L[e^{i\lambda t}] = e^{-i\lambda a} h^{\lambda}(t).$$

LUEGO $h^{\lambda}_a(t-a) = e^{-i\lambda a} h^{\lambda}(t).$

COMO a ES ARBITRARIO, PARA $a = t$

$$h^{\lambda}(0) = e^{-i\lambda t} h^{\lambda}(t).$$

ASÍ $L\{e^{i\lambda t}\} = h^{\lambda}(t) = h^{\lambda}(0)\, e^{i\lambda t}$ TOMANDO $\tilde{h}(\lambda) = h^{\lambda}(0)$

SE TIENE EL RESULTADO

TEOREMA SI L ES UN FILTRO LINEAL E INVARIANTE SOBRE UN ESPACIO DE SEÑALES CONTINUAS A TROZOS, ENTONCES EXISTE UNA FUNCIÓN h INTEGRABLE DE MODO QUE

$$L\{f\} = f * h. \quad \text{PARA TODA SEÑAL } f.$$

DEM VEAMOS QUE LA FUNCIÓN $\tilde{h}$ DEL LEMA ANTERIOR DETERMINA L.

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda t} d\lambda, \quad \text{ASÍ } Lf(t) = L\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, e^{i\lambda t} d\lambda\right\}$$

APROXIMANDO POR SUMAS DE RIEMANN

$$L\{f\}(t) \simeq L\left\{\frac{1}{2\pi}\sum_j \hat{f}(\lambda_j)\, e^{i\lambda_j t}\Delta\lambda\right\} \underset{L\ \text{LINEAL}}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_j \hat{f}(\lambda_j)\, L[e^{i\lambda_j t}]\Delta\lambda$$

TOMANDO LÍMITE EN LA ÚLTIMA PARTE DE LA IGUALDAD

$$L\{f\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, L[e^{i\lambda t}](t)\, d\lambda \underset{\text{LEMA}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\, \tilde{h}(\lambda)\, e^{i\lambda t} d\lambda$$

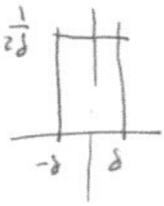
$$= \mathcal{F}^{-1}\{\hat{f}(\lambda)\cdot\tilde{h}(\lambda)\} = f * \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{h}(\lambda)\}.$$

SE TOMA $h = \mathcal{F}^{-1}\{\tilde{h}(\lambda)\}.$

AM **INTERPRETACIÓN FÍSICA**

SEA L UN FILTRO LINEAL E INVARIANTE.

SEA $f_\delta(t) = \begin{cases} 1/2\delta & \text{SI } t \in [-\delta, \delta] \\ 0 & \text{EN OTRO CASO} \end{cases}$



COMO SABEMOS $f_\delta(t) \xrightarrow[\text{PUNTUALMENTE}]{} \delta(t)$ AL IMPULSO UNITARIO

$f_\delta(t)$ ES CONTINUA A TROZOS Y ASÍ

$$L[f_\delta](t) = f_\delta * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\delta(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_{-\delta}^{\delta} f_\delta(\tau)\, h(t-\tau)\, dt \approx h(t).$$

(ESTO ES ASÍ, SI SUPONEMOS QUE h ES CONTINUA
$h(t-\tau) \approx h(t)$ SI $\tau \in (-\delta, \delta)$)

LUEGO SI EL FILTRO L FUESE CONTINUO EN ALGÚN SENTIDO

$$\begin{array}{ccc} L[f_\delta](t) & \xrightarrow[\delta \to 0]{} & L[\delta] \\ \approx & & \parallel \\ h(t) & \longrightarrow & h(t) \end{array}$$

LUEGO $h(t)$ ES LA RESPUESTA DEL FILTRO L AL IMPULSO UNITARIO

FILTROS CAUSALES; DISEÑO DE FILTROS

DISEÑAR UN FILTRO LINEAL E INVARIANTE ES EQUIVALENTE A CONSTRUIR UNA RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO δ.

<u>EJEMPLO</u> <u>EL FILTRO IDEAL PASO BAJO</u>

SEA $L[f](s) = f * h(s)$

ASÍ $\widehat{L[f](s)} = \hat{f} \cdot \hat{h}(s)$

SI $\hat{h}_\delta(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } |s| \le \delta \\ 0 & \text{si } |s| > \delta \end{cases}$ ESTE FILTRO ELIMINA TODAS LAS FRECUENCIAS $>$ CON $|s| > \delta$.

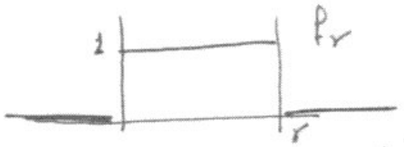
EL PROBLEMA QUE SURGE ES QUE ESTE FILTRO <u>NO ES CAUSAL</u> Y POR TANTO IRREALIZABLE; <u>VEÁMOSLO</u>

$$h_\delta(t) = \underbrace{\frac{1}{2\pi} F^{-1}[\hat{h}_\delta]}_{\text{teorema de inversión}} = \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} t\delta}{t}$$

Ver hoja 10

LUEGO $L[f](s) = \left(f(t) * \frac{1}{\pi} \frac{\operatorname{sen} t\delta}{t}\right)(s)$.

CONSIDERAMOS LA FUNCIÓN $f_r = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le t \le r \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

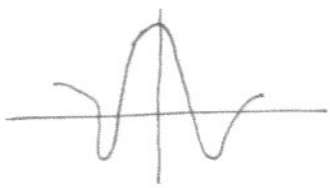


$$L[f_r](t) = f_r * h_\delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_r(\tau)\, h_\delta(t-\tau)\, d\tau =$$

$$= \int_0^r \frac{\operatorname{sen}(\delta(t-\tau))}{\pi(t-\tau)}\, d\tau \underset{\substack{u = \delta(t-\tau) \\ du = -\delta d\tau}}{=} \frac{1}{\pi\delta} \int_{\delta(t-r)}^{\delta t} \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du \underset{(*)}{=}$$

SI $S(z) = \int_0^z \frac{\operatorname{sen} u}{u}\, du$:

$$\underset{(*)}{=} \frac{1}{\pi\delta}\left(S(\delta t) - S(\delta(t-r)) \right).$$



PARA $\delta = 1$ Y $r = 1$ SALE LA FIGURA

ASÍ SI $t_0 < 0$ CON $L[f_1](t_0) \neq 0$, ES DECIR SIN RECIBIR SEÑAL, $f_1(t_0) = 0$, EL FILTRO TRABAJA.

NO PARECE QUE UN DISPOSITIVO DE ESTE TIPO SE PUEDA CONSTRUIR

AM

FILTROS CAUSALES: UN FILTRO CAUSAL ES UN FILTRO LINEAL E INVARIANTE EN EL TIEMPO EL CUAL SU SEÑAL DE SALIDA COMIENZA DESPUÉS QUE LA SEÑAL DE ENTRADA HAYA EMPEZADO A LLEGAR.

TEOREMA UN FILTRO LINEAL, INVARIANTE EN EL TIEMPO CON RESPUESTA AL IMPULSO UNITARIO h. ($L f = f * h$) ES CAUSAL SI Y SOLO SI $h(t)=0$ $\forall t<0$.

DEM $\Leftarrow]$ SEA h TAL QUE $h(t)=0$ $\forall t<0$, VEAMOS QUE $Lf(t)=0$ $t<0$ SI $f(t)=0$ SI $t<0$,

CLARO $L f(t) = f*h(t) = \int_0^{\infty} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

$f=0$ $\tau<0$

ASI SI $t<0$, $t-\tau<0$ Y $h(t-\tau)=0$, LUEGO $Lf(t)=0$

POR OTRO CASO SI f LLEGA EN EL MOMENTO $t=a$, TENEMOS QUE VER, SI L ES CAUSAL, QUE $Lf(t)=0$ $\forall t<a$

SEA $g(t) = f(t+a)$ $\quad g(t)=0$ $\forall t<0$

Y ASI $Lg(t)=0$ $\forall t<0$. COMO $f(t) = g(t-a) = g_a(t)$

TENEMOS QUE $(Lf)(t) = (L g_a)(t) = (Lg)(t-a)$

L INVARIANTE

COMO $Lg(\tau)=0$ $\forall \tau \leq 0$, SE TIENE QUE $Lg(t-a)=0$ $\forall t \leq a$.

$\Rightarrow]$ NO LA VEMOS.

EL TEOREMA ANTERIOR APLICADO A LA RESPUESTA AL IMPULSO, DA INFORMACIÓN SOBRE LA FUNCIÓN DEL SISTEMA O DE TRANSFERENCIA $\hat{h}(s)$. POR DEFINICIÓN

$$\hat{h}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-ist} dt$$

SI EL FILTRO ES CAUSAL $h(t) = 0 \quad \forall t < 0$, ASÍ $\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} h(t) e^{-ist} dt =$

$$= \mathcal{L}[h(t)](is)$$ ASÍ SE TIENE

<u>TEOREMA</u> SI L ES UN FILTRO LINEAL, INVARIANTE EN EL TIEMPO Y CAUSAL CON FUNCIÓN DE RESPUESTA AL IMPULSO h, ENTONCES LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE L ES

$$\hat{h}(s) = \mathcal{L}[h](is)$$

DONDE $\mathcal{L}$ ES LA TRANSFORMADA DE LAPLACE (QUE VEREMOS MÁS ADELANTE)

<u>EJEMPLO</u> (PROBLEMA 15:) UNO DE LOS MÁS ANTIGUOS FILTROS CAUSALES ES EL LLAMADO FILTRO DE BUTTERWORTH. QUE SE CONSTRUYE CON

$$h(t) = \begin{cases} A e^{-\alpha t} & \text{SI } t > 0, \ \alpha > 0 \\ 0 & \text{SI } t < 0 \end{cases}$$

ASÍ $\hat{h}(s) = \int_0^{\infty} A e^{-\alpha t} e^{-ist} dt = \int_0^{\infty} A e^{-t(\alpha + is)} dt =$

$$= -\frac{A e^{-t(\alpha+is)}}{\alpha + is}\Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\alpha + is} \xrightarrow[s \to \infty]{} 0$$

ASÍ AL FILTRAR UNA SEÑAL f $\quad \widehat{f * h} = \hat{f} * \hat{h} = \hat{f}(s) \cdot \frac{A}{\alpha + is}$.

SE HACEN MUY PEQUEÑAS LAS COMPONENTES DE FRECUENCIAS GRANDES (FILTRO PASO BAJO).

VEREMOS QUE PODEMOS ENCONTRAR UN CIRCUITO RLC CUYA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA SEA $\frac{A}{\alpha + is}$.