AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

Ya hemos visto que la **transformada de Laplace** es un operador **lineal**, es decir para todo par de funciones $f, g \in Lap(0,\infty)$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$L[\alpha f(t) + \beta g(t)](s) = \alpha Lf(s) + \beta Lg(s)$$

y además es **inyectivo**.

A continuación vamos a ver la propiedad que hace operativa a la transformada de Laplace para resolver ecuaciones diferenciales. Es análoga a la que vimos en su momento para la transformada de Fourier. En esencia, ambas trasformaciones permiten transformar ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas.

Teorema 1.

1. *Si f y f' son funciones de $Lap(0,\infty)$, entonces*

$$Lf'(s) = sLf(s) - \lim_{t\to 0^+} f(t) = sLf(s) - f(0^+).$$

2. *Si f, f' y f'' son funciones de $Lap(0,\infty)$, entonces*

$$Lf''(s) = s^2Lf(s) - s\lim_{t\to 0^+} f(t) - \lim_{t\to 0^+} f'(t) = s^2Lf(s) - sf(0^+) - f'(0^+).$$

3. *En general, si f, f', ..., $f^{n)}$ son funciones de $Lap(0,\infty)$, entonces*

$$Lf^{n)}(s) = s^nLf(s) - s^{n-1}f(0^+) - ..... - sf^{n-2)}(0^+) - f^{n-1)}(0^+).$$

Demostración: La demostración de 3) se hace por inducción donde el caso $n = 1$ es precisamente el apartado 1). Solo vamos a ver 1) y 2), que son los casos que después vamos a utilizar en las aplicaciones; y donde se ve todo lo necesario para hacer la demostración general.

Veamos 1). Teniendo en cuenta la integración por partes

$$Lf'(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

como $f \in Lap(0,\infty)$ se sigue que $\lim_{t\to\infty} f(t)e^{-st} = 0$, y así

$$= -\lim_{t\to 0^+} f(t)e^{-st} + sLf(s) = -f(0^+) + sLf(s).$$

Veamos 2). Teniendo en cuenta la integración por partes y 1)

$$Lf''(s) = \int_0^\infty f''(t)e^{-st}dt = f'(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt$$
$$= -\lim_{t\to 0^+} f'(t)e^{-st} + s[sLf(s) - f(0^+)] = -f'(0^+) - sf(0^+) + s^2Lf(s)\Box$$

Ejemplo 1. *Consideramos el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' - 6y' + 5y = 0 \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 11. \end{cases}$$

Esta E.D.O. de segundo orden y con dos condiciones iniciales tiene solución única, como ya sabemos. Vamos a resolver este problema usando la transformada de Laplace. Aplicando en ambos lados de la ecuación la transformada y usando sus propiedades tenemos que

$$0 = L[y'' - 6y' + 5y](s) = L[y''](s) - 6L[y'](s) + 5L[y](s)$$
$$= s^2Ly(s) - sy(0^+) - y'(0^+) - 6(sLf(s) - f(0^+)) + 5Ly(s)$$
$$= (s^2 - 6s + 5)Ly(s) - 3s - 11 - 6(-3) = (s^2 - 6s + 5)Ly(s) - 3s + 7.$$

Ecuación algebraica de primer grado cuya incógnita es $Ly(s)$, así despejando

$$Ly(s) = \frac{3s - 7}{s^2 - 6s + 5}.$$

Ésta es la solución en trasformadas del problema de arriba. Como la transformada de Laplace es inyectiva, sabemos que solo existe una única función y suya transformada es precisamente $\frac{3s-7}{s^2-6s+5}$. Encontrar esta función y conociendo $Ly(s)$ es lo que se llama el **problema inverso**.

La primera forma de abordarlo es mirar en las tablas a ver si está allí la función $Ly(s)$ que tenemos, en nuesto caso $\frac{3s-7}{s^2-6s+5}$. Lo más probable es que no esté, pero si podemos descomponerla en otras más sencillas que si lo estén. Esto se suele hacer utilizando el **método de descomposición en fracciones simples**. En nuestro caso, como $s^2 - 6s + 5 = (s-1)(s-5)$

$$\frac{3s-7}{s^2-6s+5} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5}.$$

Observemos que las funciones $\frac{1}{s-1}$ y $\frac{1}{s-5}$ si están en las tablas. Por tanto mirando en ellas y utilizando las propiedades lineales de la transformada de Laplace sabemos que la función y que buscamos es

$$y(t) = Ae^t + Be^{5t}.$$

Lo cuál no es más que la solución general de la ecuación diferencial homogénea de arriba, como ya sabemos. Para terminar el problema solo hay que encontrar las constantes A y B. Esto es fácil con el método de separación en fracciones simple que ya conocemos, por ejemplo del cálculo de primitivas de funciones racionales que se ve en un primer curso de cálculo. Así

$$\frac{3s-7}{s^2-6s+5} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} \;\Rightarrow\; A(s-5) + B(s-1) = 3s-7$$

lo que nos lleva al sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcr} A & + & B & = & 3 \\ -5A & - & B & = & -7 \end{array}$$

cuya solución es $A = 1$ y $B = 2$. Así la solución de nuestro problema de Cauchy es

$$y(t) = e^t + 2e^{5t}\square$$

Ahora es fácil comprobar que esta es la solución que buscamos.

Usar la transformada de Laplace para resolver una E.D.O. de segundo orden **homogénea** no parece muy interesante toda vez que hay que resolver de todas formas la ecuación característica de la E.D.O. (en el caso de arriba $\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$); y ya con esto se conoce la solución general de la E.D.O. Es más interesante usar la transformada de Laplace en el caso **no homogéneo**.

Ejemplo 2. *Consideramos el problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{c} x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{array} \right.$$

Esta problema modeliza un circuito RLC donde en el momento inicial no pasa la corriente, tenemos el interruptor abierto y lo cerramos en el momento $t = 0$ y comienza a entrar una señal f.

Aplicando transformadas de Laplace a ambos lados de la ecuación

$$L(x''(t) + a_1x'(t) + a_2x(t))(s) = Lf(s),$$

como en este caso las condiciones iniciales son nulas, lo anterior es equivalente a

$$s^2Lx(s) + a_1sLx(s) + a_2Lx(s) = (s^2 + a_1s + a_2)Lx(s) = Lf(s).$$

Ahora despejando, la señal de salida del circuito en transformadas es,

$$Lx(s) = \frac{Lf(s)}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Definición 1. *Dada una E.D.O. lineal de segundo orden y coeficientes constantes*

$$x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t)$$

se llama ***función de transferencia del sistema*** *(o de la ecuación) a la función*

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_2}.$$

Observemos que la **función de transferencia** es la inversa del **polinomio característico** de la E.D.O. lineal homogénea.

El problema inverso de encontrar x conocida su transformada $\frac{Lf(s)}{s^2+a_1 s+a_2}$, va depender ahora de la transformada de la señal de entrada $Lf(s)$, aunque en los caso más corrientes usaremos como antes el método de descomposición de fracciones simple y despues miraremos en las tablas de transformadas.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es