AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

PROPIEDADES DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER.

Teorema 1. *Dadas dos funciones f y g absolutamente integrables y para todo número $c \in \mathbb{C}$ se tiene que la transformada de Fourier es un operador lineal, es decir*

1. $\widehat{f+g}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + \widehat{g}(\lambda) \qquad y \qquad \widehat{cf}(\lambda) = c\widehat{f}(\lambda)$.
   Además se verifican las siguientes propiedades.
2. $\widehat{f(t-a)}(\lambda) = e^{-i\lambda a}\widehat{f}(\lambda)$.
3. *Si* $g(t) = \overline{f(-t)}$, *entonces* $\widehat{g}(\lambda) = \overline{\widehat{f}(\lambda)}$.
4. *Si* $\beta \geq 0$, *entonces* $\widehat{f(\beta t)}(\lambda) = \frac{1}{\beta}\widehat{f}(\frac{\lambda}{\beta})$.
5. *Si existen las derivadas* $f', f'', f^{3)}, ..., f^{n)}$, *todas ellas absolutamente integrables y verificando además que* $\lim_{t\to\pm\infty} f^{k)}(t) = 0$ *para todo* $k = 1, 2, ..., n$, *entonces se tiene que*

$$\widehat{f^{n)}}(\lambda) = (i\lambda)^n \widehat{f}(\lambda).$$

6. *Si* $h(t) = tg(t)$, *entonces* $\widehat{h}(\lambda) = i\frac{\partial \widehat{g}(\lambda)}{\partial \lambda}$.

Observación 1.

1. *La propiedad 5) es la que permite entender como se modifica una señal al hacerla pasar por un circuito 'RLC', como veremos más adelante.*
2. *La transformada inversa* $F^{-1}[f](x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda$ *tiene propiedades análogas a las de la transformada de Fourier.*
3. *La demostración de estas propiedades, como de otras que veremos más adelante, requieren de técnicas de integración que superan el alcance de nuestro curso.*

Demostración: 1) $\widehat{cf+g}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}(cf+g)(t)e^{-i\lambda t}dt$ de la linealidad de la integral se sigue que $\widehat{cf+g}(\lambda)=c\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt+\int_{-\infty}^{\infty}g(t)e^{-i\lambda t}dt=c\widehat{f}(\lambda)+\widehat{g}(\lambda)$.

2)

$$\widehat{f(t-a)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-a)e^{-i\lambda t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-a)e^{-i\lambda(t-a)}e^{-i\lambda a}dt,$$

con el cambio de variable $u=t-a$, y así $du=dt$, tenemos que

$$=e^{-i\lambda a}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du=e^{-i\lambda a}\widehat{f}(\lambda).$$

3) Usando el cambio de variable $u=-t$, y así $du=-dt$, tenemos que

$$\widehat{g}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{f(-t)}e^{-i\lambda t}dt$$

$$=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}f(-t)e^{i\lambda t}dt}=\overline{\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\lambda u}du}=\overline{\widehat{f}(\lambda)}.$$

4)

$$\widehat{f(\beta t)}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\beta t)e^{-i\lambda t}dt$$

hacemos el cambio de variable $u=\beta t$, con $du=\beta dt$ y teniendo en cuenta que $\beta\geq 0$, se sigue que

$$=\frac{1}{\beta}\int_{-\infty}^{\infty}f(u)e^{-i\frac{\lambda}{\beta}u}du=\frac{1}{\beta}\widehat{f}(\frac{\lambda}{\beta}).$$

5) Veamos el caso $k=1$ y después procederemos por inducción. Si f' es absolutamente integrable existe $\widehat{f'}$ y así haciendo la correspondiente integración por partes tenemos que

$$\widehat{f'}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}f'(t)e^{-i\lambda x}dt$$

$$=\lim_{r\to\infty}\left(f(t)e^{-i\lambda t}\Big|_{-r}^{r}\right)+i\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt$$

ahora como $|e^{-i\lambda t}|=1$ para todos $\lambda,t\in\mathbb{R}$, y además $\lim_{r\to\pm\infty}f(r)=0$, se tiene que

$$=i\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt=i\lambda\widehat{f}(\lambda).$$

Supongamos que $\widehat{f^{k)}}(\lambda) = (i\lambda)^k \widehat{f}(\lambda)$, procesiendo de forma análoga al caso anterior

$$\widehat{f^{k+1)}}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{k+1)}(t)e^{-i\lambda x}dt$$

$$= \lim_{r\to\infty} \left(f^{k)}(t)e^{-i\lambda t} \Big|_{-r}^{r} \right) + i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f^{k)}(t)e^{-i\lambda t}dt$$

ahora como $|e^{-i\lambda t}| = 1$ para todos $\lambda, t \in \mathbb{R}$, y además $\lim_{r\to\pm\infty} f^{k)}(r) = 0$, se tiene que

$$= i\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f^{k)}(t)e^{-i\lambda t}dt = i\lambda \widehat{f^{k)}}(\lambda) = (i\lambda)^{k+1)} \widehat{f}(\lambda).$$

6)

$$\widehat{h}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} tg(t)e^{-i\lambda t}dt = i \int_{-\infty}^{\infty} -itg(t)e^{-i\lambda t}dt$$

$$= i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \left(g(t)e^{-i\lambda t}\right)}{\partial \lambda} = i \frac{\partial \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\lambda t}dt\right)}{\partial \lambda} = i \frac{\widehat{g}(\lambda)}{\partial \lambda} \square$$

Aplicación.

En los temas siguientes veremos un modelo matemático del funcionamiento de un circuito RLC.

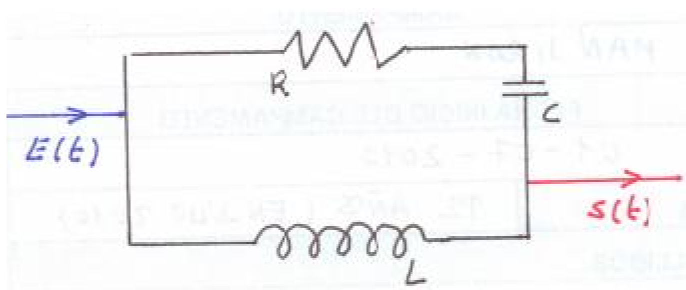

FIGURA 1. Circuito RLC.

Al entrar una corriente o señal $E(t)$ en el circuito, éste trasforma la señal y da una señal de salida $s(t)$ que verifica una ecuación diferencial del tipo (ya explicaremos más adelante el significado matemático de lo que sigue)

$$E(t) = s(t) + RCs'(t) + LCs''(t)$$

Ahora, si aplicamos la transformada de Fourier a las funciones que están a ambos lados de esta igualdad

$$\widehat{E}(\lambda) = (s(t) + RC\widehat{s'(t)} + LCs''(t))(\lambda),$$

aplicando la linealidad de la transformada de Fourier y su comportamiento sobre las derivadas, tendremos que

$$= \widehat{s}(\lambda) + RC(i\lambda)\widehat{s}(\lambda) + LC(i\lambda)^2\widehat{s}(\lambda)$$

y despejando tendremos que

$$\widehat{s}(\lambda) = \widehat{E}(\lambda)\frac{1}{1 + RCi\lambda - \lambda^2 LC}.$$

Observación 2.

1. *La función* $H(\lambda) = \dfrac{1}{1 + \lambda RCi - \lambda^2 LC}$ *se llama* ***función de transferencia*** *del sistema.*
2. *Las 'energías' de las frecuencias de la señal son modificadas por el factor* $H(\lambda)$ *(* $\widehat{s}(\lambda) = \widehat{E}(\lambda)H(\lambda)$*). A este proceso se le llama* ***filtrado*** *de la señal. El circuito RLC hace el papel de* ***filtro****.*
3. *Distintos valores de R,L y C (resistencias, inductancias y condensadores) permiten filtrar la señal de un modo u otro.*

En los temas siguientes, al estudiar los distintos tipos de ecuaciones diferenciales, veremos como construir distintos tipos de filtros.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es