AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

CONVOLUCIÓN.

La propiedad siguiente de la transformada de Fourier es una de las claves de su empleo en **Teoría de la Señal** (vamos a ver como construir **filtros** de modo teórico) y en **Estadística.**

Definición 1. *Dadas dos funciones* $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que sean absolutamente integrables se define la* ***convolución*** *de ambas funciones como otra función dada por*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \qquad \textit{para todo} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Las siguientes propiedades son necesarias para manipular la convolución, aunque su demotración esta fuera de nuestro alcance.

Proposición 1. *Sean* f, g *y* h *funciones absolutamente integrables. Entonces*

1. $f * g$ *es una función absolutamente integrable, es decir existe*
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f * g(x)|dx < \infty.$$
2. $f * g = g * f$.
3. $f * (g + h) = f * g + f * h$

Demostración: 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \right| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|g(t)|dtdx$$

usando el Teorema de Fubinni que nos permite cambiar el orden de integración

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|dx \right) dt$$

y empleando el cambio de variable $u = x - t$ (luego $du = dx$) tenemos que

$$= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| dt \int_{-\infty}^{\infty} |f(u)| du < \infty$$

lo cual es finito por que ambas funciones f y g son absolutamente integrables.

2) Esta propiedad sale empleando adecuadamente el cambio de variable $u = x - t$, ya que

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) g(x-u) du = g * f(x)$$

3) Sale directamente de la linealidad de la integral $\square$

La propiedad fundamental de la convolución es su relación con la transformada de Fourier. La transformada de una convolución es el producto de las transformadas.

Teorema 1. *Si f y g son dos funciones absolutamente integrables, entonces*

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \widehat{f}\,\widehat{g}(\lambda)$$

Demostración: De la proposición anterior sabemos que $f * g$ es una función absolutamente integrable, por tanto existe su transformada de Fourier $\widehat{f * g}$. Ahora

$$\widehat{f * g}(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \right) e^{-i\lambda x} dx$$

usando el Teorema de Fubinni que nos permite cambiar el orden de integración tenemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-i\lambda x} e^{-i\lambda t} dx \right) e^{-i\lambda t} dt$$

$$= \int_{\infty}^{\infty} g(t) e^{-i\lambda t} dt \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) e^{-i\lambda(x-t)} dx = \widehat{g}\widehat{f}(\lambda) \square$$

De forma análoga para la transformada inversa y usando la fórmula de inversió tenemos que

Corollary 0.1. 1. $F^{-1}[f * g(\lambda)](x) = 2\pi F^{-1}[f](x) F^{-1}[g](x)$.
2. $F^{-1}[\widehat{f} * \widehat{g}(\lambda)](x) = 2\pi f g(x)$.
3. $\widehat{fg}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \widehat{f} * \widehat{g}(\lambda)$.

Aplicación: Filtrado en frecuencia.

Si consideramos una señal $f(t)$ en el dominio del tiempo, su transformada de Fourier $\widehat{f}(\lambda)$ representa el mismo fenómeno en este caso en el dominio de las frecuencias (podemos regresar a f de forma unívoca con la fórmula de inversión). Ahora fijada una cantidad positiva $w > 0$ se puede considerar la señal en el dominio de las frecuencias

$$\delta_{[-w,w]}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad \lambda \in [-w,w] \\ 0 & \text{si} \quad \lambda \notin [-w,w]. \end{cases}$$

a esta función se le llama **filtro ideal paso bajo**. Si hacemos el producto

$$\widehat{f}(\lambda)\delta_{[-w,w]}(\lambda),$$

eliminamos todas las frecuencias λ de f tales que $|\lambda| > w$.

Observación 1. *Veamos de que posible señal, en el dominio del tiempo, procede el filtro ideal paso bajo.*

Sea $g(\lambda) = \delta_{[-w,w]}(\lambda)$ y calculemos $\widehat{g}(x)$.

$$\widehat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{[-w,w]}(\lambda) e^{-i\lambda x} d\lambda$$
$$= \int_{-w}^{w} e^{-i\lambda x} d\lambda = \frac{e^{-i\lambda x}}{-ix} \Bigg|_{-w}^{w} = \frac{1}{-ix}\left[e^{-iwx} - e^{iwx}\right]$$
$$= \frac{2}{x}\left[\frac{e^{iwx} - e^{-iwx}}{2i}\right] = \frac{2}{x}\operatorname{sen} xw.$$

Aunque la función que nos sale $\widehat{g}$ no es absolutamente integrable, empleando técnica de integración de funciones de variable compleja, se puede calcular $F^{-1}[\widehat{g}]$, y con ello la fórmula de inversión nos dice que

$$\delta_{[-w,w]}(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x} \operatorname{sen}(xw) e^{i\lambda x} dx$$

si hacemos el cambio de variable $u = -x$ con $du = -dx$, tenemos que

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{-\infty} \frac{2}{-u}\operatorname{sen}(-uw)e^{-i\lambda u}(-1)du$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\operatorname{sen} uw}{u}e^{-i\lambda u}du = \frac{1}{2\pi}\widehat{\frac{2\operatorname{sen} uw}{u}}(\lambda).$$

Luego el filtrado en frecuencia de una señal f con un filtro paso bajo

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\lambda)\delta_{[-w,w]}(\lambda) &= \frac{1}{2\pi}\widehat{f}(\lambda)\widehat{\frac{2\operatorname{sen} uw}{u}}(\lambda)\\ &= \frac{1}{\pi}\,\widehat{f(u)*\frac{\operatorname{sen} uw}{u}}(\lambda).\end{aligned}$$

es igual a convolucionar la señal f con la señal $\dfrac{1}{\pi}\dfrac{\operatorname{sen} uw}{u}$.

Observación 2. *La teoría matemática de los* ***filtros lineales*** *permite probar que los filtros ideales paso bajo no pueden ser construidos físicamente (ver apéndice de este tema; ya fuera del alcance del curso). En problemas se presentan los filtros de Butterworth que sirven para superar físicamente esta inconveniencia de los filtros ideales paso bajo.*

Ejemplo 1. *Dada una señal f y una cantidad positiva $w > 0$, la componente en frecuencia f_w de f acotada en la banda $[-w, w]$ se define por*

$$f_w(t) = (f * g)(t)$$

donde g es el filtro ideal paso bajo en el dominio del tiempo.

Como hemos visto anteriormente

$$\delta_{[-w,w]}(\lambda) = \widehat{\frac{\operatorname{sen}(uw)}{\pi u}}(\lambda),$$

luego

$$\begin{aligned}f_w(t) &= (f(u) * \frac{\operatorname{sen}(uw)}{\pi u})(t)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)\frac{\operatorname{sen}(uw)}{\pi u}du.\end{aligned}$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`