AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

APLICACIONES.

La transformada de Fouier es la herramienta teórica central en Teoría de la Señal. Se pueden encontrar muchas aplicaciones de la misma. Nosotros vamos a exponer unas pocas.

En esta capítulo nos vamos a centrar en las aplicaciones discretas de la transformada de Fourier. En concreto, el **Teorema de Muestreo de Shannon** y la definición de **la Transformada Discreta de Fourier**. Hay más. En el apéndice de este tema se dejan a la curiosidad del lector:

1. La **Teoría lineal de filtros**. De forma teórica se puede probar que los filtros lineales, como los circuitos RLC, se comportan siempre como una convolución con cierta función h especifica de cada filtro. Esta función es precisamente la respuesta del filtro al impulso unitario o función de Dirac.
2. La **función de Dirac**. Sus propiedades respecto de la convolución y la transformada de Fourier permiten entender muchos procesos de la Teoría de Señales. Por ejemplo la modulación en amplitud.
3. **Modulación en Amplitud**. Es un proceso que se usa en la **multiplexación** por división en frecuencias. Usado en radio, televisión o fibra óptica.

ANÁLISIS DE FOURIER DISCRETO.

Una señal desde el punto de vista matemático es una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

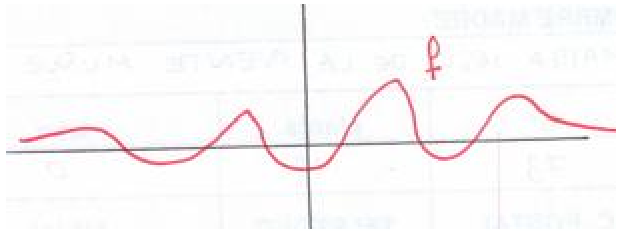

Figura 1. Señal matemática.

Una **señal analógica** en realidad no es más que una corriente eléctrica la cuál puede ser 'tratada' por medio de sistemas eléctricos o electrónicos (**Hardware**).

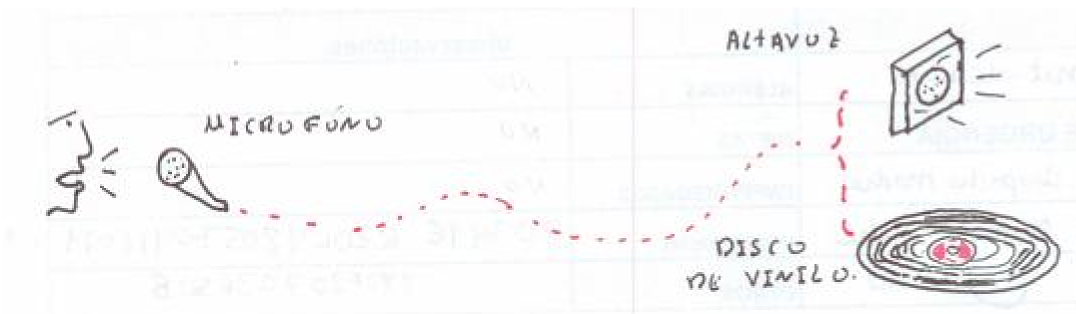

Figura 2. Señal analógica.

Una señal se puede recoger, trasmitir, guardar o reproducir de nuevo, aproximadamente igual al original o convenientemente distorsionada. Para realizar estos procesos debemos transformar distintas corrientes eléctricas.

Definición 1. *(**Señales Digitales**). Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ una señal y sea Δt un intervalo de tiempo. Evaluamos (o experimentalmente, **muestreamos**) la función f en los tiempos $k\Delta t$, con $k = 0, 1, 2, 3, ..., n, n+1, ...,$ así*

$$f_k = f(k\Delta t)$$

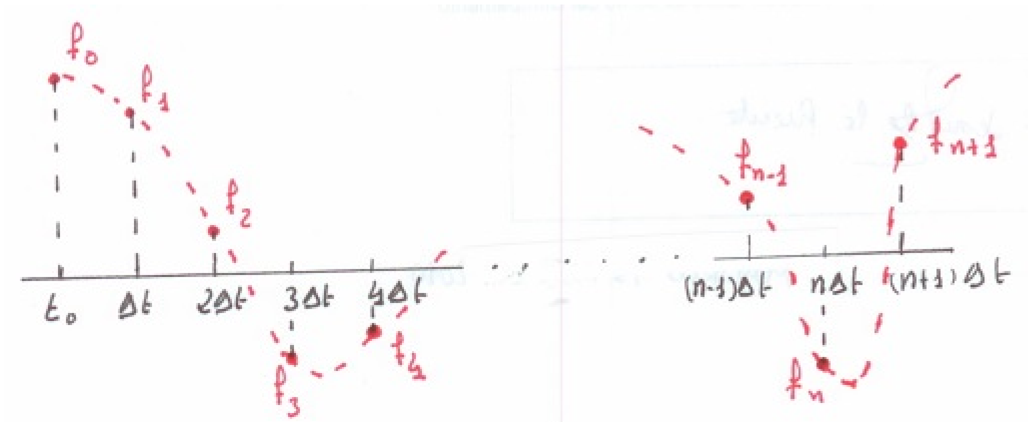

FIGURA 3. Muestreo digital. Señal Digital.

La ***señal digital*** *no es más que una sucesión de números* $\{f_0, f_1; f_2, ..., f_n, f_{n+1}, ...\}$.

Observación 1. *Si los números* $\{f_0, f_1; f_2, ..., f_n, f_{n+1}, ...\}$ *conservan toda la información de la señal (analógica)* f*, entonces es fácil:*

.- Guardar la señal (se guardan los registros $\{f_0, f_1; f_2, ..., f_n, f_{n+1}, ...\}$*).*

.- Transformar la señal, esto no es más que transformar los números $\{f_0, f_1; f_2, ..., f_n, f_{n+1}, ...\}$*. Lo cuál se hace ahora con técnicas matemáticas (****Software****).*

EL TEOREMA DE MUESTREO DE SHANNON

Dada una señal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ¿cuántos puntos f_j debemos tomar para no perder nada de la información que contiene f? La respuesta a esta pregunta la da el **Teorema de Muestreo de Shannon**.

Definición 2. *Una señal* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se llama de* ***frecuencia de Banda Limitada*** *si existe* $W > 0$ *de modo que*

$$\widehat{f}(\lambda) = 0 \qquad \textit{para todo} \qquad |\lambda| > W.$$

Es decir, las frecuencias fuera del intervalo $[-W, W]$ *anulan a la transformada de Fourier de* f*.*

Ejemplo 1. *El oido humano solo consigue oir frecuencias menores de 20kHz. Así antes de trasmitir una conversación telefónica o grabar un CD se filtra la señal acústica quitándole las frecuencias mayores de 20kHz (señal acústica, micrófono, señal eléctrica, filtro paso bajo).*

Teorema 1. ***(de Muestreo de Shannon).*** *Supongamos que f es una señal de banda limitada, $\widehat{f}(\lambda) = 0$ si $|\lambda| > W$, y que $\widehat{f}$ es continua y derivable a trozos, entonces $f = F^{-1}[\widehat{f}]$ está totalmente determinada por los valores que toma en los tiempos $t_n = n\frac{\pi}{W}$ para $n \in \mathbb{Z}$. En concreto*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{W})\frac{\operatorname{sen}(Wt - n\pi)}{Wt - n\pi}$$

donde la serie de funciones converge a f uniformemente.

Demostración: Por ser $\widehat{f}$ continua, existe $\displaystyle\int_{-W}^{W} |\widehat{f}(\lambda)|^2 d\lambda$ y además por ser derivable a trozos el Teorema Fundamentel del Cálculo nos dice que $\widehat{f}(\lambda) = \int_{-W}^{\lambda} \widehat{f}'(s)ds$. Por tanto los Teoremas de Convergencia de Series de Fourier nos dicen que

$$\widehat{f}(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{\pi}{W}n\lambda} \qquad \text{uniformemente sobre} \qquad [-W, W]$$

donde los c_n son los coeficientes complejos de Fourier de f

$$c_n = \frac{1}{2W}\int_{-W}^{W} \widehat{f}(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{W}n\lambda}d\lambda.$$

Como $\widehat{f}(\lambda) = 0$ si $|\lambda| > W$ se puede escribir que

$$c_n = \frac{\pi}{2W\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{-i\frac{\pi}{W}n\lambda}d\lambda.$$

Ahora, por el Teorema de Inversión $f(t) = \displaystyle\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{it\lambda}d\lambda$, de lo que se deduce que los coeficientes de Fourier c_n son de la forma

$$c_n = \frac{\pi}{W}f(-n\frac{\pi}{W}) \qquad \text{para todo} \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto la serie de Fourier de $\widehat{f}$ se puede escribir ahora como $\widehat{f}(\lambda) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{W}f(n\frac{\pi}{W})e^{-i\frac{\pi}{W}n\lambda}$, la cual converge uniformemente sobre $[-W, W]$. Antes de seguir con el argumento, vamos a calcular la siguiente integral. Para ello tendremos en cuenta que la función $\operatorname{sen} x$ es una función impar

$$\int_{-W}^{W} e^{-i(n\pi\frac{\lambda}{W}-\lambda t)}d\lambda$$

$$= \int_{-W}^{W} \cos(\lambda t - n\pi\frac{\lambda}{W})d\lambda = \frac{\operatorname{sen}(\lambda t - n\pi\frac{\lambda}{W})}{t - n\pi\frac{1}{W}} \Bigg| \begin{matrix} W \\ -W \end{matrix}$$

$$= \frac{2W \operatorname{sen}(Wt - n\pi)}{tW - n\pi}.$$

Retomamos nuestra argumento. Usando de nuevo el Teorema de Inversión tenemos que

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \widehat{f}(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-W}^{W} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{W} f(n\frac{\pi}{W})e^{-i\frac{\pi}{W}n\lambda}\right) e^{i\lambda t}d\lambda,$$

dado que la convergencia de la serie es uniforme, podemos intercambiar los signos de integral y sumatorio; así

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{W} f(n\frac{\pi}{W}) \int_{-W}^{W} e^{-in\pi\frac{\lambda}{W}+i\lambda t}d\lambda$$

y usando la integral que hemos calculado antes

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\frac{\pi}{W})\frac{\operatorname{sen}(Wt - n\pi)}{tW - n\pi}\square$$

Observación 2. *La frecuencia de* $\operatorname{sen}(Wt - n\pi)$ *es* $\frac{W}{2\pi}$*, el doble de esta fracuencia es* $\frac{W}{\pi}$*, que es precisamente la tasa a la que se muestrea a la función* f *(es decir el periodo de muestreo es* $\Delta t = \frac{\pi}{W}$*).*

Definición 3. *Si* W *es la menor frecuencia para la cuál* $\widehat{f}(\lambda) = 0$ *para todo* $|\lambda| > W$*, a la frecuencia* $\frac{W}{2\pi}$ *se le llama **frecuencia de Nyquist** y al doble de esta frecuencia* $\frac{W}{\pi}$ *se le llama **frecuencia de muestreo**.*

Nyquist propuso de forma experimental (ver los gráficos siguientes) la llamada tasa de muestreo y fue Shannon un poco más tarde el que probó el teorema de arriba.

Una forma de ver de donde sale la frecuencia de muestreo es la siguiente. Fijemos un punto P en una rueda circular que se mueve sobre una superficie plana.

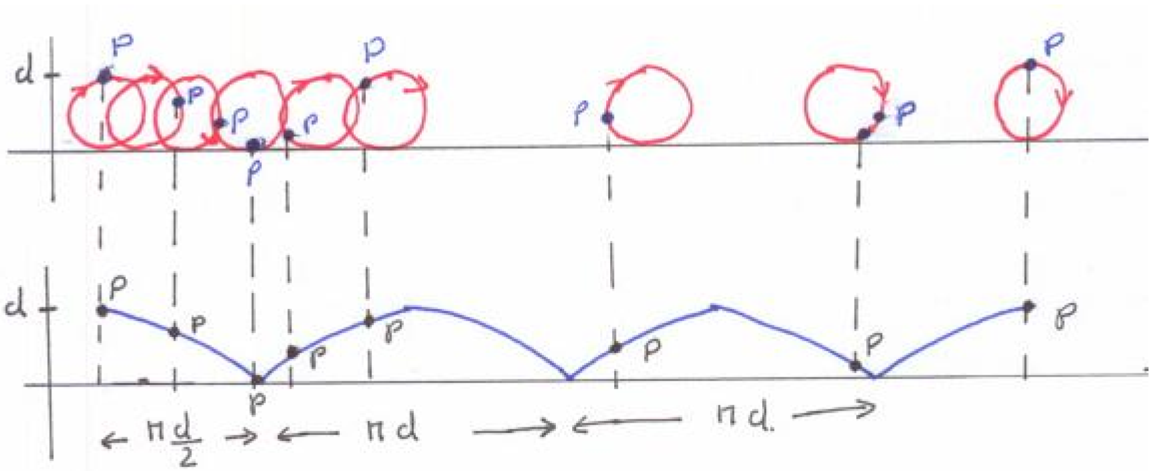

Figura 4. Sistema de periodo $d\pi$.

Si muestreamos la gráfica de arriba con un periodo $R > \frac{d\pi}{2}$ (por tanto con una frecuencia menor que dos veces la frecuencia del sistema $\frac{1}{R} < \frac{2}{d\pi}$) entonces

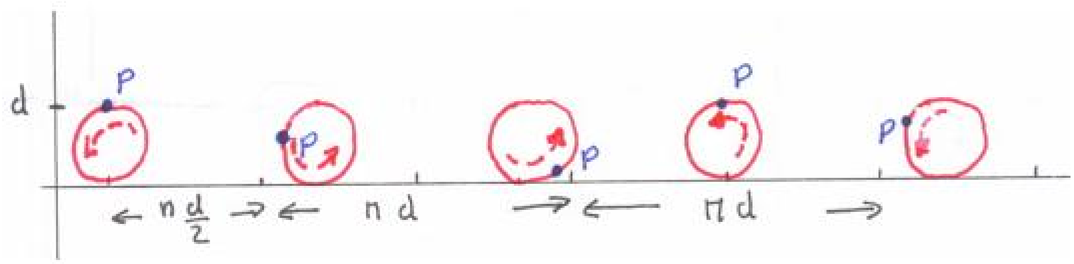

Figura 5. Señal submuestreada.

parece que el movimiento de la rueda es en sentido contrario al que realmente realiza y por tanto la información que recogemos no es la real. Por eso Nyquist propuso muestrear con una frecuencia dos veces mayor que la frecuencia del sistema a muestrear.

Como ejemplo, si uno quiere grabar un CD musical o preparar un archivo de audio MP3, lo que se graba son muestras de la señal musical recogidas a una frecuancia que es mayor que el doble de la mayor frecuencia que aparezca en la señal (o al menos la mayor frecuencia que puede percibir el oido humano 20kHz).

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es