AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

LA TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una señal continua (por ejemplo una corriente en un conductor), al muestrearla $(f_n = (f(n\Delta t))_{n\in\mathbb{Z}}$, donde $\Delta t = \frac{\pi}{W}$ es el periodo correspondiente a la frecuencia de muestreo $\frac{W}{\pi}$; la señal se convierte en una señal discreta o digital. Una sucesión infinita no es muy operativa a la hora de calcular, así que debemos tomar una parte finita de ella, cuyo tamaño convenimos en función de las necesidades técnicas que tengamos. Lo que nos da pie a definir:

Definición 1. *Fijado un número natural $N \in \mathbb{N}$*

1. $S_N = \{y = (y_n)_{n=-\infty}^{\infty} \quad : \quad y_n = 0 \text{ si } n \neq 0, 1, 2, ..., N-1\}$. *$S_N$ es el conjunto de las sucesiones de términos nulos salvo los comprendidos entre $n = 0$ y $n = N - 1$.*
2. *Se llama **Transformada de Fourier Discreta (DFT)** de una señal discreta $y \in S_N$ a otra señal discreta $\widehat{y} = (\widehat{y}_k)_{k=0}^{N-1} \in S_N$ definida por*

$$\widehat{y}_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \overline{w}^{kn} = \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-i\frac{2\pi}{N}kn}$$

   para $k = 0, 1, 2, ..., N-1$ y donde $w = e^{i\frac{2\pi}{N}}$ es una N-ésima raíz de la unidad (recordemos que $w^0, w, w^2, ..., w^{N-1}$son todas la N raíces de la unidad).
3. ***Notación:*** *$F(y) = (\widehat{y}_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in S_N$ donde $y_k = 0$ siempre que $k \neq 0, 1, 2, ..., N-1$.*

Observación 1. *¿De donde sale la definición anterior?*

Una señal discreta y la podemos ver como una muestra de una señal analógica f con $y_n = f(n\Delta)$, con $n = 0, 1, 2, .., N-1$ y Δ un intervalo de tiempo prefijado. Calcular la Transforamda discreta $\widehat{y} = (\widehat{y}_k)_k$ sería como muestrear la transformada de Fourier $\widehat{f}$, es decir $\widehat{y}_k = \widehat{f}(\lambda_k)$ para $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Pensemos en el Teorema de Muestreo intercambiando los papeles de f y $\widehat{f}$. Así la función f, fuera del intervalo $[0, N\Delta]$, es nula y la frecuencia de muestreo es la mitad del intervalo dividida por π; es decir $\frac{\frac{N\Delta}{2}}{\pi} = \frac{N\Delta}{2\pi}$. Luego el periodo de muestreo para $\widehat{f}$ es $\frac{2\pi}{N\Delta}$. Así $\lambda_k = k\frac{2\pi}{N\Delta}$ para $k = 0, 1, 2, ..., N-1$. Usando ahora la definición de la Transformada de Fourier

$$\widehat{f}(\lambda_k) = \widehat{f}(k\frac{2\pi}{N\Delta}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ik\frac{2\pi}{N\Delta}t}dt,$$

teniendo en cuenta que f es nula fuera de $[0, N\Delta]$ y la relación de integral de Riemann con las sumas de Riemann

$$\begin{aligned}&\approx \Delta\sum_{n=0}^{N-1} f(n\Delta)e^{-ik\frac{2\pi}{N\Delta}n\Delta}\\ &= \Delta\sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}\end{aligned}$$

que es, salvo una constante, la definición que hemos dado de **DFT**.

Fijado el tamaño de una señal discreta, de N muestras, la Transformada Fourier Discreta viene dada por

$$\widehat{y}_k = \sum_{n=0}^{N-1} y_n \overline{w}^{kn} \quad \text{para} \quad k = 0, 1, 2, .., N-1.$$

La expresión anterior se puede escribir en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} \widehat{y}_0 \\ \widehat{y}_1 \\ \\ \vdots \\ \\ \widehat{y}_{N-1} \end{pmatrix} = \overline{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w & w^2 & \cdots & w^{N-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \cdots & w^{2(N-1)} \\ \vdots & & & \cdots & \\ & & & & \\ 1 & w^{N-1} & w^{2(N-1)} & \cdots & w^{(N-1)^2} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \\ \vdots \\ \\ y_{N-1} \end{pmatrix}$$

La matriz de potencias de las raíces N-ésima de la unidad la denotamos por $F_N = (a_{k,n})_{k,n=0,1,...,N-1} = (w^{kn})_{k,n=0,1,...,N-1}$ y así podemos escribir la Transformada de Fourier Discreta como

$$\widehat{y} = \overline{F_N} y.$$

La matriz F_N es una matriz $n \times n$, por tanto calcular las n entradas de la transformada discreta $\widehat{y}$ conocidas las n entradas de y requiere efectuar n^2 multiplicaciones.

Observación 2.

1. *Se puede definir una* ***Transformada Inversa Discreta de Fourier*** *de forma similar a lo que hemos hecho en la definición anterior.*
2. *Un* ***filtro paso bajo discreto****: si* $\widehat{y}_k = \frac{1}{\Delta}\widehat{f}(k\frac{2\pi}{N\Delta})$*, entonces* k *hace referencia a las frecuencia* $k\frac{2\pi}{N\Delta}$ *de la señal; si queremos anularlas es suficiente con cambiar* $\widehat{y}_k$ *por cero y después con la* ***transformada inversa*** *volver a la señal filtrada.*
3. *El producto de matrices del cálculo de la transformada discreta es una operación muy costosa en multiplicaciones. Existe un muy famoso algoritmo,* ***el algoritmo de la Transformada Rápida de Fourier (FFT)****, que permite hacer el cálculo del producto de matrices con solo un número de multiplicaciones del orden de* $n \lg n$ ***(F.F.T. J.W. Cooley y John Tukey 1965).***

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es