Tema 8: Conjuntos y Relaciones

Definiciones: Un **conjunto** es una colección de objetos que llamamos sus **elementos**. Acostumbramos a representar los conjuntos por letras mayúsculas $A, B, C, \ldots$ y sus elementos por minúsculas. $a, b, c, \ldots$. Escribimos $a \in A$ para decir que a es elemento del conjunto-A.
Los conjuntos se pueden definir enumerando sus elementos, tal como $A = \{1, 4, 7, 9, 16, 25, 49\}$, o dando una propiedad, que caracteriza a estos, ya sea definida por una fórmula matemática o lógica. Así, $A = \{m \in \mathbf{N} : m \leq 60, \wedge \exists n \in \mathbf{N}, n2 = m\}$.
Un conjunto A es **subconjunto** de otro B: $A \subset B$, si todo elemento de A lo es de B. Dos conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos. Así, para demostrar la igualdad entre dos conjuntos A y B hay que demostrar que $A \subset B$ y $B \subset A$.

8.1. Operaciones básicas con conjuntos

Las operaciones entre conjuntos, **unión** e **intersección** se definen como:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\},\ A \cap B\{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$A - B := \{x : x \in A \wedge\ x \notin B\}$$

Los conjuntos que utilizamos se suponen contenidos dentro de otro mayor U, llamado **universo**.
Llamamos complementario del conjunto A, y lo notamos A^c al conjunto $U - A$
Sean A, B y C tres conjuntos. Recuerda las propiedades distributivas de la unión e intersección, y las leyes de De Morgan:

a) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.
b) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

1. Si A, B, C son subconjuntos de un conjunto X, demostrar que

$$(A - B) - C \subseteq A - (B - C).$$

Encontrar una condición necesaria y suficiente para que se cumpla la igualdad.

2. (i) Denotamos por A el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 5, y por B el de los que terminan en 5 ó en 0. Demuestra que $A = B$.
(ii) Sean A el conjunto de los números naturales que son múltiplos de 4y B el de los que terminan en 4 Comprueba que $A \not\subset B$ y $B \not\subset A$.

3. Demuestra las siguientes igualdades de conjuntos:
a) $\bigcup_{n=1} 7\left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{7}, 1\right]$
b) $\bigcap_{n=2}^{k} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $k \geq 2$

8.2. Producto cartesiano de dos conjuntos

Si A y B son dos conjuntos, el **producto cartesiano** $A \times B$ es el conjunto de pares ordenados (m, n) tales que $m \in A$ y $n \in B$.

Estudiar algunos ejemplos para entender el concepto, ayudándose de una repesentación gráfica, tales como $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $[2,3] \times [1,2]$, $[0,\infty] \times \mathbb{R}$ etc.

8.3. Relaciones en un conjunto. Relaciones de equivalencia

Dar **una relación** R entre los elementos de un conjunto A es dar un subconjunto R del producto cartesiano $A \times A$. Dado un par de elementos $(a,b) \in A \times A$, decimos que*a* **esta relacionado con** b, si $(a,b) \in R$ Escribimos $n \sim_R m$, o abusando de la notación, nRm.
Sea R una relación en el conjunto A.

- Se dice que R verifica la propiedad **reflexiva** cuando para cada $p \in A$ se verifica que $(p,p) \in R$.
- Se dice que R verifica la propiedad **transitiva** cuando para todos $m,n,p \in A$ tales que $(m,n) \in R$ y $(n,p) \in R$ se cumple también que $(m,p) \in R$.
- Se dice que R verifica la propiedad **simétrica** cuando para todos $m,n \in A$ tales que $(m,n) \in R$ se cumple también que $(n,m) \in R$.
- Se dice que R es una **relación de equivalencia cuando es reflexiva, transitiva y simétrica.**

4. En el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros, consideramos las relaciónes siguientes. Decir qué propiedades de las anteriores verifican y cuáles son relaciones de equivalencia.

(i): mRn si $m-n$ es par.
(ii) mRn cuando m divide a n.
(iii) mRn cuando m y n tienen la misma paridad.

8.4 Clases de equivalencia, particiones y conjunto cociente

Sea R **una relacion de equivalencia** definida en un conjunto C. Para cada $m \in C$, el subconjunto de C,

$$[m]_R = \{p \in C : (m,p) \in R\} \subset C$$

formado por todos los todos los elementos de C que se relacionan con m, se denomina **clase de equivalencia de** m **en R.**

5. Dado un entero positivo m, fijo, considera en el conjunto $\mathbf{Z}$ la relación R_m definida por , $aR_mb \Leftrightarrow a-b$ es múltiplo de m. Escribimos también $a \equiv b \bmod m$. (i) Demostrar que es una relación de equivalencia. (ii) Si $m=4$, ¿cuáles de los siguientes enteros estan relacionados entre sí: $-3,-5,-16,4,6,201$?

6. (i) Demostrar que la relación de equivalencia anterior coincide con la relación, aRb sí y sólo si los enteros a y b dan el mismo resto al ser divividos por m.
(ii) Describir las clases de equivalencia (**clases de restos módulo** m demostrando que hay exactamente m clases distintas; a saber, $[0]_{R_m}, [1]_{R_m}, \cdots, [m-1]_{R_m}$, que en adelante denotamos simplemente $[0]_m, [1]_m, \cdots, [m-1]_m$.
(iii) Si $m=6.$, ¿en cuál de las clases anteriores están el $-23,-11,-7,15,41,256$?

Dada una relación de equivalencia R en el conjunto C, llamamos **conjunto cociente**, C/R. al conjunto cuyos elementos son las clases de equivalencia.

Dar una **partición** de un conjunto C, es dar una colección finita de **subconjuntos disjuntos** $C_1, \ldots, C_k \subset C$ tales que :

$$C = \cup_{i=1} k C_i$$

Es decir, todo elemento de C está en uno y sólo uno de los subconjuntos que forman la partición.

7. (i) Se considera en el conjunto C una relación de equivalencia R. Demuestra que las clases de equivalencia de R dan lugar a una partición del conjunto C. (ii) Se considera una partición $C_1, \ldots, C_k$ de un conjunto C. Se define en C la relación: $aRb \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \ldots, k\} : a, b \in C_i$. Demuéstrese que es una relación de equivalencia.

8. En el conjunto de los puntos del plano $\mathbf{R}2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbf{R}\}$ se definen las relaciones R y S siguientes: $(a, b)R(c, d) \Leftrightarrow a2 + b2 = c2 + d2 \quad (a, b)S(c, d) \Leftrightarrow a + b = c + d$.
a) Demuestra que ambas son relaciones de equivalencia.
b) En cada caso, determina la clase del punto (1, 0).
c) Describe geométricamente las clases de equivalencia y el conjunto coiente de ambas relaciones.

9. En el conjunto $A = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$, consideramos la relación R definida del siguiente modo $(m, n)R(p, q) \Leftrightarrow mq = np$.
a) Demuestra que se trata de una relación de equivalencia.
b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de $(3, -5)$, del $(-7, 1)$ y del $(8, 4)$?
c) Justifica que cada clase de equivalencia representa un número racional.

Anexo

Las operaciones de unión e intersección se pueden definir de manera obvia (explicar como) para una cantidad infinita de conjuntos.

10. i) $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right] = \{0\}$
ii) $\bigcup_{n \in \mathbf{N}} \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right] = (0, 1)$
iii) $\bigcup_{n=1}^{\infty} (-n, n) = \mathbf{R}$

Tema 9: Aplicaciones

9.1. Aplicación inyectiva, sobreyectiva, biyectiva

Sean A y B dos conjuntos. Una aplicación (función) f de A a B , que se denota $f : A \to B$, es una asignación, para cada $a \in A$, de un único elemento de B que denotaremos $f(a)$.

- El conjunto A se llama el **dominio** de la función f.
- El conjunto de elementos $b \in B$ tales que existe algún elemento $a \in A$ que verifica $f(a) = b$ se llama la **imagen** de f. La imagen de f no tiene que ser todo el conjunto B.
- La aplicación f se llama **inyectiva** cuando para cada elemento $b \in B$ existe a lo sumo un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. La aplicación f se llama **suprayectiva** (o aplicación sobre) cuando para cada elemento $b \in B$ existe al menos un elemento $a \in A$ tal que $f(a) = b$. La aplicación f se llama **biyectiva** o biyección cuando es inyectiva y suprayectiva.
- Dado un subconjunto $X \subset A$, llamamos **imagen de X por** f a $f(X) := \{f(x) : x \in X :\}$. Dado un subconjunto $Y \subset B$, llamamos **imagen inversa de Y por** f a $f^{-1}(Y) := \{a \in A : f(a) \in Y\}$

1. Considera la aplicación $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ definida por $f(n) = n^2$ para cada $n \in \mathbf{Z}$.
   a) ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
   b) Indica una representación posible de esta función.

2. Considera la aplicación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ definida por $f(t) = (t + 3, 2 - 3t)$ para cada $t \in \mathbf{R}$. Halla $f(5)$ y las imágenes mediante f de $\mathbf{R}$ y los intervalos $[0, 1]$ y $[0, \infty)$.

3. Considera la aplicación $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 6x + 5$ para cada $x \in \mathbf{R}$.
   a) ¿Es f inyectiva, sobreyectiva o biyectiva?
   b) Determina $f^{-1}[0, 5], f^{-1}(-6, -5)$ y $f^{-1}(-6, 5)$.
   c) Representa la función e indica cual es su imagen.

4. Construye una biyección entre los intervalos $(0, 1)$ y $(5, 8)$.

5. Construye una biyección entre el intervalo $(0, 1)$ y el intervalo infinito $(0, +\infty)$.

9.2. El tamaño de los conjuntos. Cardinalidad de un conjunto. Conjuntos numerables y no numerables

El tamaño de un conjunto finito es el número de elementos.

6. Denotemos por $\#A$ el numero de elementos de un conjunto A. Demostrar (por inducción sobre n, comenzando con $n = 2$) que :

$$\#(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \#A_i - \sum_{i<j} \#(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \ldots (-1)^n \#(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Sin embargo los conjuntos infinitos como veremos pueden tener diferentes tamaños, o incluso tener el mismo tamaño que un subconjunto propio. El conjunto infinito básico de referencia con el cual comparar los demás, será el conjunto $\mathbf{N}$ de los números naturales. La idea del tamño , o mejor la comparación entre estos tamños la formalizamos con la noción de **cardinalidad de un conjunto**.

- Decimos que un conjunto A tiene el mismo **cardinal** que otro B cuando existe una biyección entre A y B, esto es, cuando podemos emparejar los elementos de A y B sin que sobre ningún elemento ni en A ni en B. Así dos conjuntos finitos tienen el mismo cardinal sí y sólo si tienen el mismo número de elementos.

- Un conjunto A se dice **numerable** cuando tiene el mismo cardinal que $\mathbf{N}$, es decir, cuando existe una biyección entre A y $\mathbf{N}$.

7. Demuestra que los siguientes subconjuntos de $\mathbf{N}$ son numerables:
   a) El conjunto de los números naturales pares.
   b) El conjunto de los números primos.
   c) Cualquier subconjunto infinito de números naturales.

8. Demuestra que el conjunto $\mathbf{Z}$ de los números enteros es numerable.

9. Demuestra que el conjunto $\mathbf{Q}$ de los números racionales es numerable.

10. (**Un conjunto no numerable**) Llamamos palabra infinita de dos letras A y B a una sucesión infinita del tipo

$$ABABBABBA\cdots$$

Consideramos el conjunto de todas las palabras infinitas de dos letras. Si este conjunto fuese numerable, podríamos colocar todas las posibles palabras infinitas de dos letras en un cuadro numerado:

$$\begin{array}{ll} (1) & ABABBABBA\cdots \\ (2) & AABAABAAB\cdots \\ (3) & BBBAABAB\cdots \\ (4) & BBBBAABAB\cdots \\ (5) & AAAAAABBA\cdots \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Toma la palabra infinita que corresponde a la diagonal de este cuadro $AABBA\cdots$ y vamos a formar la palabra que resulta de intercambiar en ella las A's por las B's y recíprocamente ; es decir obtenemos la palabra $BBAAB\cdots$¿Podría ser esta palabra una de las del cuadro? ¿Qué deduces de ello?

11. Sea $\mathcal{F}$ un conjunto numerable (Asií, podemos escribirlo como una sucesión infinita $\mathcal{F} = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Sea $\Sigma := \{F \subset \mathcal{F} : \text{F es } finito\}$. Demostrar que Σ es un conjunto numerable. (Indic. A cada subconjunto finito $F \subset \mathcal{F}$ se le puede asignar una sucesionń (y_i) de "ceros y unos en que a partir de un lugar son todos ceros", a saber : $y_i = 1$ si $x_i \in F$, y , $y_i = 0$ si $x_i \notin F$. Probar que el conjunto de estas sucesiones es numerable.)