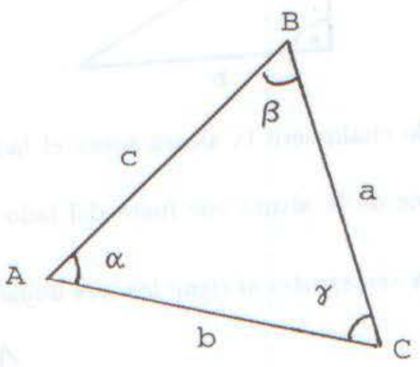
"Je vous conseille de douter de tout, excepté que les trois angles d'un triangle sont égaux à deux droit"
Voltaire

Tema 3: Trigonometría

3.1. Introducción

En un triángulo distinguimos:

- 3 vértices: A, B y C
- 3 lados: a, b y c
- 3 ángulos: α, β y γ



1. Argumentar por qué no existe un triángulo con tres lados $a = 2$, $b = 7$ y $c = 10$.

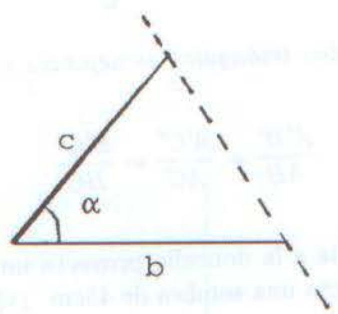
2. Argumentar por qué no existe un triángulo con dos ángulos α y β iguales ambos a un ángulo recto.

Entre los lados y los ángulos de un triángulo hay ciertas relaciones, que vamos a describir, y que permiten conocer los tres lados y tres ángulos de un triángulo conociendo sólo unos pocos datos.

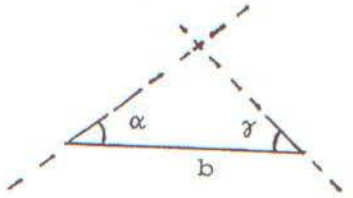
Teorema. *Los tres ángulos de un triángulo suman dos rectos. Así* $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

Observemos que si conocemos:

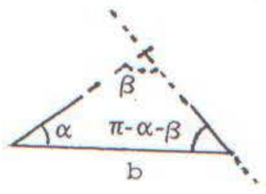
A) dos lados y el ángulo entre ellos, el triángulo queda determinado



B) dado un lado y dos ángulos, el triángulo queda determinado.

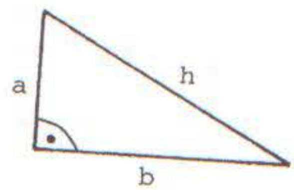


ó



Así hemos visto, gráficamente, que con tres datos es posible determinar todo el triángulo. La trigonometría enseña a conocer númericamente los seis datos de un triángulo conociendo solo tres. Los Teoremas de Pitágoras y Tales son esenciales en lo que sigue. Recordémoslos.

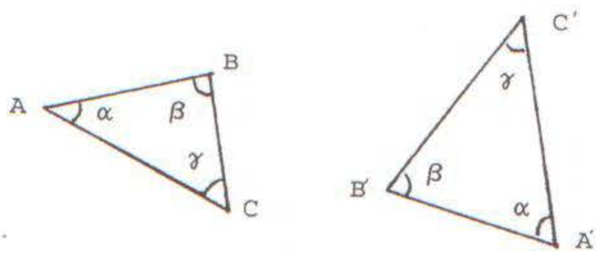
Teorema de Pitágoras. *En un triángulo rectángulo* $h^2 = a^2 + b^2$



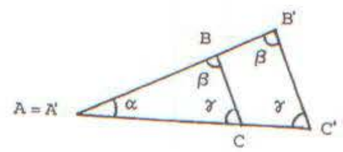
3. Deducir que en un triángulo cualquiera la altura sobre el lado mayor cae dentro de dicho lado.

Indicación: Suponer que el pie de la altura cae fuera del lado y de ello encontrar una contradicción.

Definición. *Dos triángulos son semejantes si tiene los tres ángulos iguales.*



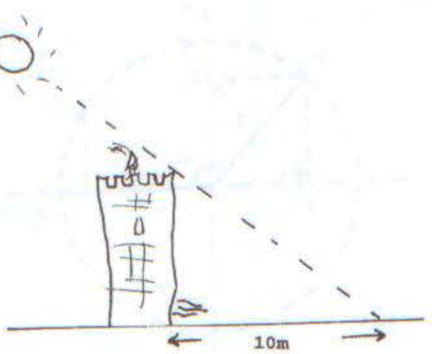
Si sobreponemos dos ángulos iguales de dos triángulos semejantes:



Teorema de Tales. *Dados dos triángulos semejantes como los de la figura anterior se cumplen las siguientes igualdades:*

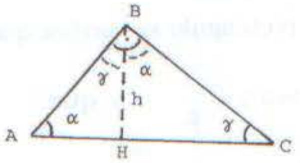
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

4. La torre donde el dragón custodia a la doncella proyecta una sombra de unos 10m de larga. A su vez un palo de un metro proyecta una sombra de 45cm. ¿Qué altura ha de tener la escalera que permita escapar a la doncella?



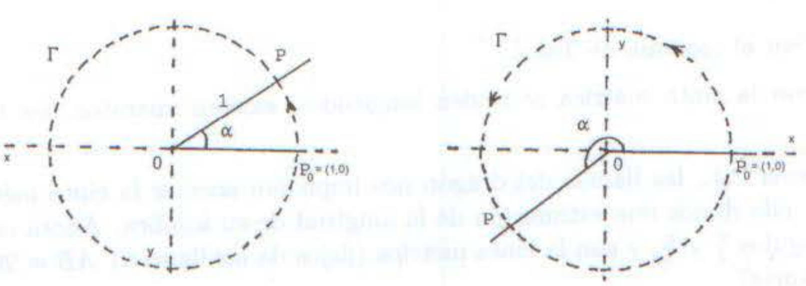
5. **Teorema de la Altura**: Dado un triángulo rectángulo ΔABC y H el pie de la altura sobre la hipotenusa, comprobar que $h^2 = AH \times HC$.

Indicación: Ver que ΔAHB y ΔBHC son triángulos semejantes.



3.2. Las funciones seno y coseno

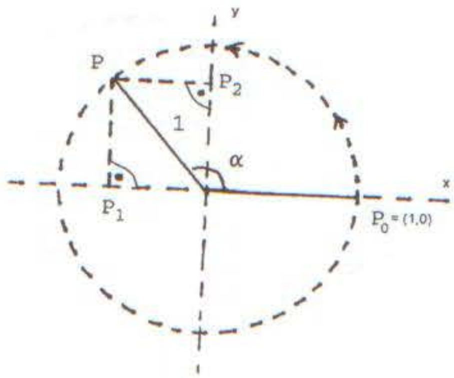
Sobre Γ la circunferencia de centro el origen y radio 1, y por tanto de longitud 2π, se considera el ángulo α que queda determinado por un punto $P \in \Gamma$:



Como la medida en radianes del ángulo α es la longitud del arco P_0P, se verifica que $\alpha \in [0, 2\pi)$.

Definición. *Dado un ángulo* $\alpha \in [0, 2\pi)$

- *se llama coseno de* α, $\cos\alpha = P_1$
- *se llama seno de* α, $\operatorname{sen}\alpha = P_2$
- *se llama tangente de* α, $\tan\alpha = \frac{P_2}{P_1}$

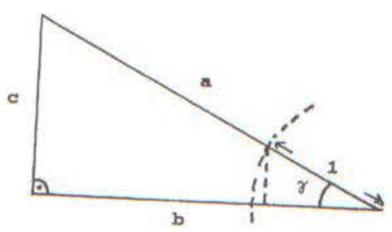


6. Calcular $\cos\frac{\pi}{2}$ y $\operatorname{sen}\pi$. ¿Por qué $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$? Calcular $\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}$ y $\cos\frac{3\pi}{4}$. **Indicación**: Usar el teorema de Pitágoras

7. ¿Por qué $\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha \in [-1,1], \forall\alpha \in [0,2\pi)$?

8. Comprobar que en un triángulo rectángulo se verifica que:

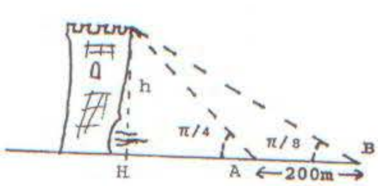
$$\cos\gamma = \frac{b}{a}, \operatorname{sen}\gamma = \frac{c}{a} \qquad \textbf{y que} \qquad \tan\gamma = \frac{c}{b}$$



Indicación: Usar el teorema de Tales.

Así como con la cinta métrica se miden longitudes, existen aparatos, los teodolitos, que miden ángulos.

9. En el problema P.4., las llamas del dragón nos impedían acercar la cinta métrica a la base de la torre, por ello dimos una estimación de la longitud de su sombra. Ahora con el teodolito medimos los ángulos $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{8}$, y con la cinta métrica (¡lejos de las llamas!) $AB = 200m$. ¿Cuál es la altura de la torre?

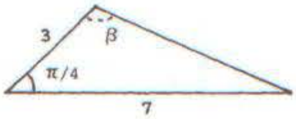


Indicación: $\tan\frac{\pi}{4} = \frac{h}{HA}$ y $\tan\frac{\pi}{8} = \frac{h}{HA+200}$; usar 8. para hallar la altura h.

10. De un triángulo se conocen la longitud de dos lados: 3 y 7; y el ángulo que forman entre ellos: $\mathbf{22{,}5^0}$. ¿Cuál es el área del triángulo?

11. Las ciudades A y B van a ser unidas por tren. Entre ellas hay una montaña que tendrá que ser perforada. Desde un punto C, desde el que se ven A y B, se miden las distancias $CA = 3Km$ y $CB = 27km$, así como el ángulo $< ACB = 135^o$. Determinar la longitud de la vía.

12. Calcular el ángulo β del triángulo del dibujo.



Indicación: es suficiente con calcular sen β.

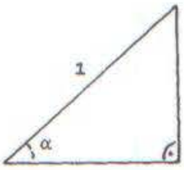
3.3. Fórmulas trigonométicas

Las funciones seno, coseno y tangente aparecen en muchos cálculos.
Las siguientes igualdades son útiles al manipular esta funciones. Si α y β son ángulos:

1)$\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$	2)$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \operatorname{sen}\alpha$
3)$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \cos\alpha\operatorname{sen}\beta + \operatorname{sen}\alpha\cos\beta$	4)$\operatorname{sen}2\alpha = 2\cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$
5)$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$	6)$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

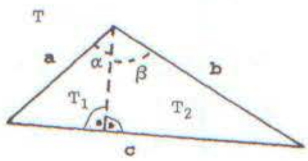
13. Deducir 4) de 3). Calcular $\cos\frac{\pi}{8}$ y $\operatorname{sen}\frac{\pi}{8}$.

14. Si $\alpha \in [0, \frac{\pi}{2})$, del siguiente dibujo deducir 2).



Indicación: Usar que los ángulos de un triángulo suman π y usar 8.

15. Si α y β son ángulos cuya suma es menor que π, deducir del siguiente dibujo la igualdad 3).



Indicación: $\acute{a}reaT = \acute{a}reaT_1 + \acute{a}reaT_2$; usar además 10.

16. Deducir de las fórmulas trigonométricas que

$$\cos^2\alpha = \frac{1 + cos2\alpha}{2}$$