ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DISTANCIAS.

En la recta real $\mathbb{R}$, para medir la **distancia** entre dos puntos de la misma $x, y \in \mathbb{R}$

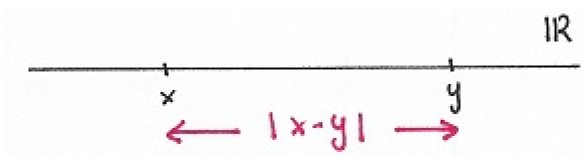

Figura 1. Distancia entre dos números reales.

consideramos el **valor absoluto** de su diferencia

$$|x - y|.$$

Recordemos las propiedades del valor absoluto:

$$\begin{array}{rcccc} |\ \ | & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \to & |x| \end{array}$$

verifica que para todo $x, y, \lambda \in \mathbb{R}$

.- $|x| \geq 0$; y si $|x| = 0$, entonces $x = 0$.
.- $|\lambda x| = |\lambda||x|$.
.- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

En el plano $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{C}$) y en general en $\mathbb{R}^n$, el Teorema de Pitágoras nos dice como medir **distancias** entre dos puntos $x, y \in \mathbb{R}^n$:

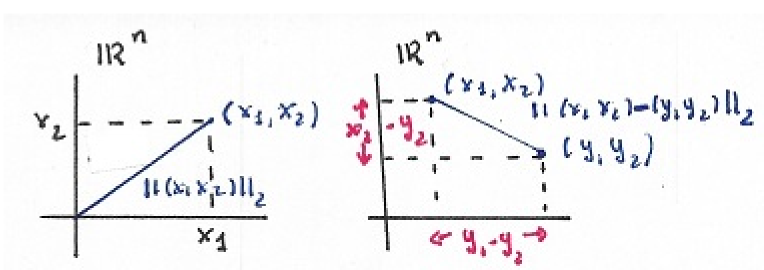

Figura 2. Distancia euclidea.

Es decir, usamos la diferencia del **módulo**

$$||x - y||_2.$$

Recordemos las propiedades del módulo:

$$\begin{array}{ccccccc} || \ \ ||_2 & : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} & & \\ & & x & \to & ||x||_2 & = & \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} \end{array}$$

verifica que para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

.- $||x||_2 \geq 0$; y si $||x||_2 = 0$, entonces $x = 0$.
.- $||\lambda x||_2 = |\lambda| ||x||_2$.
.- $||x + y||_2 \leq ||x||_2 + ||y||_2$.

Las mismas propiedades del valor absoluto. Las dos primeras primeras propiedades son fáciles de probar usando solo la definición de módulo. La tercera requiere un poco más de trabajo.

Lema 1. ***(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)***
Si $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, *entonces*

$$|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i| \leq ||x||_2 ||y||_2.$$

Demostración: Como $\sum_{i=1}^{n} (x_i \lambda + y_i)^2 \geq 0$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, desarrollando por el Binomio de Newton tenemos que

$$0 \leq ||x||_2^2 \lambda^2 + 2(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i)\lambda + ||y||_2^2.$$

En particular lo anterior es cierto si $\lambda = -\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{||x||_2^2}$. Ahora despejando se tiene el resultado (el caso $||x||_2 = 0$ es trivial) $\square$

Con esta propiedad tenemos que

$$||x + y||_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i + \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq$$
$$||x||_2^2 + 2||x||_2 ||y||_2 + ||y||_2 = (||x||_2 + ||y||_2)^2.$$

Con el concepto de **distancia** se puede usar el concepto de **proximidad** (o convergencia), el cuál nos permite definir, entre otras cosas, lo que es una **sucesión convergente** o una **función continua** (ver las definiciones precisas un poco más adelante).

Vamos a generalizar el concepto de Valor Absoluto o Módulo. Esto nos va permitir definir distancias en conjuntos diversos.

Definición 1. *Sea X un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$. Una **norma** sobe X es una aplicación:*

$$\begin{array}{ccccc} || \ \ || & : & X & \to & [0, \infty) \\ & & x & \to & ||x|| \end{array}$$

que verifica que para todo $x, y \in X$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

.- $||x|| \geq 0$; y $||x|| = 0$ *si y solo si* $x = 0$.
.- $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$.
.- $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Un espacio vectorial X sobre él que se tiene definido una norma $||\quad||$ se llama ***espacio normado****.*

Definición 2. *En un espacio normado $(X, ||\quad||)$, se llama* ***distancia*** *entre dos puntos (o vectores) $x, y \in X$ a*

$$||x - y||.$$

Ejemplos 1.

- $(\mathbb{R}, |\quad|)$ y $(\mathbb{R}^n, ||\quad||_2)$ son ejemplos de espacios normados (observa que si $n = 1$, entonces $|\quad| = ||\quad||_2$).
- $(\mathbb{R}^n, ||\quad||_\infty)$ es un espacio normado, donde

$$\begin{array}{rcl} ||\quad||_\infty : \mathbb{R}^n & \to & [0, \infty) \\ x & \to & ||x||_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, ..., n\}. \end{array}$$

  - Prueba que efectivamente $||\quad||_\infty$ es una norma.
  - Prueba que para todo $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ se verifica que

$$||x||_\infty \leq ||x||_2 \leq \sqrt{n}||x||_\infty$$

    (en este caso decimos que las **normas son equivalentes**).
- $(C([a, b], \mathbb{R}), ||\quad||_\infty)$ es un espacio normado, donde $C([a, b], \mathbb{R})$ es el espacio de las funciones continuas definidas sobre el intevalo de la recta $[a, b]$ o

$$C([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \ : \ f \text{ continua }\}$$

  y donde

$$\begin{array}{rcl} ||\quad||_\infty : C([a, b], \mathbb{R}) & \to & [0, \infty) \\ f & \to & ||f||_\infty = \max\{|f(x)| : x \in [a, b]\}. \end{array}$$

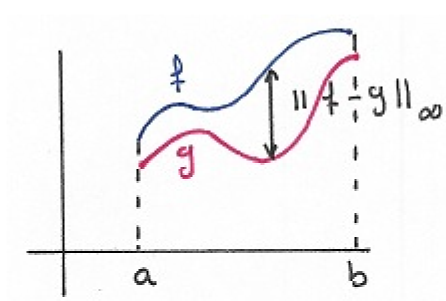

FIGURA 3. Una distancia entre funciones.

  - Prueba que $C([a, b], \mathbb{R})$ es un espacio vectorial

- Prueba que $||f||_\infty$ está bien definida (es decir que toda función continua sobre un intervalo cerrado alcanza su máximo).
- Prueba que $||f||_\infty$ es una norma (**Indicación:** si una función continua f verifica que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$, entonces prueba que $||f||_\infty > 0$).

Definición 3. *Sea $(X, ||\quad||)$ un espacio normado.*

1. *Una* ***sucesión*** *$(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$ se llama* ***convergente*** *si existe $x \in X$ (límite de la sucesión; $\lim_{k\to\infty} x_k = x$) si*

$$\textit{para todo} \quad \epsilon > 0 \quad \textit{existe} \quad k_0 \quad \textit{de modo que, para todo} \quad k \geq k_0$$

$$\textit{se tiene que} \qquad ||x - x_k|| < \epsilon.$$

2. *Una* ***sucesión*** *$(x_k)_{k=1}^\infty \subset X$ se llama de* ***Cauchy*** *si*

$$\textit{para todo} \quad \epsilon > 0 \quad \textit{existe} \quad k_0 \quad \textit{de modo que, para todo} \quad k_1, k_2 \geq k_0$$

$$\textit{se tiene que} \qquad ||x_{k_1} - x_{k_2}|| < \epsilon.$$

3. *Un* ***espacio normado*** *se llama* ***completo*** *si las sucesiones de Cauchy son las mismas que las convergentes.*

Observación 1. *Una sucesión en un espacio normado $(x_k)_k \in (X, ||\quad||)$ converge a $x \in X$ si y solo si*

$$\lim_{k\to\infty} ||x - x_k|| = 0.$$

Observemos que esta última sucesión ($(||x - x_k||)_k \subset \mathbb{R}$) es una sucesión de números reales.

Es fácil ver (**Ejercicio**) que toda sucesión convergente es de Cauchy. Sin embargo hay espacios normados que no son completos. Aunque esto último, ahora, no nos interesa (ver libros de Análisis Funcional).

Por el Teorema de Bolzano-Weierstrass (o equivalentemente el Teorema de Completitud de $\mathbb{R}$) $(\mathbb{R}^n, ||\quad||_2)$ es completo. También lo es $(\mathbb{R}^n, ||\quad||_\infty)$ ya que ambas normas son equivalentes (de hecho se puede probar que cualquier norma sobre $\mathbb{R}^n$ es equivalente a la norma euclidea $||\quad||_2$).

Algo nuevo es que

Ejemplo 1. ($C([a,b], \mathbb{R}), ||\quad||_\infty$) *es completo.*

Aplazamos la demostración. Necesitamos recordar algunas cosas más antes de hacerla.

Definición 4. *Sean $(X, ||\quad||_X)$ y $(Y, ||\quad||_Y)$ dos espacios normados. Una aplicación (o función) T*

$$\begin{array}{rcccl} T : X & \to & Y & & \\ x & \to & T(x) & = & y \end{array}$$

*se dice que es **continua en el punto** $x_0 \in X$ si*

$$\text{para todo} \quad \epsilon > 0 \quad \text{existe} \quad \delta > 0 \quad \text{de modo que, para todo} \quad ||x - x_0||_X < \delta$$

$$\text{se tiene que} \qquad ||T(x) - T(x_0)||_Y < \epsilon.$$

*Si T es continua en cada punto de X se dice simplemente que es **continua**.*

Ejercicio 1. *Sean $(X, ||\quad||_X)$ y $(Y, ||\quad||_Y)$ dos espacios normados. Prueba que una aplicación T entre ambos espacios es continua en $x_0 \in X$ si y solo si para toda sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset X$ convergente a x_0 $\quad$ ($\lim_{k\to\infty} x_k = x_0$,) se verifica que*

$$\lim_{k\to\infty} T(x_k) = T(x_0).$$

Las definiciones que hemos dado de convergencia de sucesiones o de funciones continuas son análogas a las que se conocen en el marco del Análisis Mátemático sobre $\mathbb{R}$ (una variable).

Ejemplos 2.

- *Si $X = \mathbb{R}^n$ y $Y = \mathbb{R}^m$, podemos pensar en aplicaciones $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. El estudio de la continuidad de estas funciones se ve en un curso de **Cálculo Diferencial**.*
- *Se considera el problema de Cauchy (E.D.O. de primer orden con condiciones iniciales)*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t, x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

Integrando, obtenemos la forma integral de la E.D.O.

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Si $f : [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\quad t_0, t \in [a, b]$, $\quad$ y $\quad x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\quad$ podemos pensar en la apliación:

$$\begin{array}{rccccc} T & : & C[a,b] & \to & C[a,b] & \\ & & x & \to & T(x) & = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds. \end{array}$$

Ver que este tipo de aplicaciones (operadores) están bien definidas y son continuas es algo que se ve y se necesita en los Teorema de Existencia y Unicidad de E.D.O. de primer orden.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es