ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

COMPACIDAD. CONVERGENCIA UNIFORME.

COMPACIDAD.

La **compacidad** es una propiedad fundamental en todo el Análisis Matemático. Vamos a definirla en espacios normados, aunque es una propiedad que supera este marco.

Definición 1. *Sea $(X, ||\quad||)$ un espacio normado. Un subconjunto $K \subset X$ se llama **compacto** si para toda sucesión $(x_k)_{k=1}^{\infty} \subset K$ se puede encontrar una subsucesión $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a un límite $x \in K$, es decir*

$$\exists \lim_{j \to \infty} x_{k_j} = x \in K.$$

Ejemplos 1.

- *El Teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que los intervalos cerrados $[a, b]$ de la recta real $\mathbb{R}$ son compactos.*
- *Usando el ejemplo anterior, coordenada a coordenada, se ve que los hiper-rectángulos en $\mathbb{R}^n$*

$$R = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots\ldots. \times [a_n, b_n]$$

son compactos.

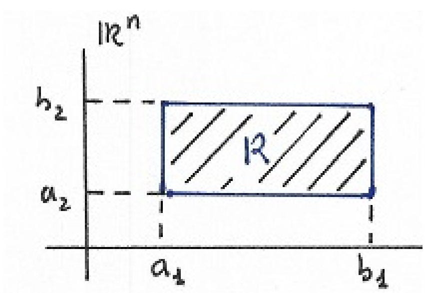

FIGURA 1. Rectángulo en $\mathbb{R}^n$.

Algunos hechos que hacen de los compactos esenciales en Análisis Matemático los da el siguiente Teorema.

Teorema 1. *Sean $(X, ||\quad||_X)$ y $(X, ||\quad||_X)$ espacios normados. Sea $K \subset X$ un conjunto compacto. Si*

$$T : X \to Y$$

es una aplicación (o operador) continuo, entonces

A: *T sobre K está acotado.*

B: *Existe* $\max\{\ ||T(x)||_Y \ :\ x \in K\ \}$.

Demostración:

A: Supongamos que existe $x_k \in K$ tal que $||T(x_k)||_Y > k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (es decir suponemos que T no está acotado en K). Por ser K compacto existe $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a un límite $x \in K$. Por ser T continua
$$\lim_{j\to\infty} T(x_{k_j}) = T(x),$$
pero esto no es posible por ser la sucesión $(T(x_{k_j}))_j$ no acotada y por tanto no convergente. LLegamos a contradicción. Por tanto existe $M > 0$ tal que $||T(x)||_y \leq M$ para todo $x \in K$ $\square$

B: Como $\{||T(x)||_y \ :\ x \in K\,\} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado existe su supremo
$$\alpha = \sup\{||T(x)||_y \ :\ x \in K\,\}.$$
Ahora para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $x_k \in K$ tal que
$$\alpha - \frac{1}{k} \leq T(x_k) \leq \alpha.$$
Por ser K compacto existe $(x_{k_j})_{j=1}^{\infty}$ convergente a un límite $x \in K$. Por ser T continua $\lim_{j\to\infty} T(x_{k_j}) = T(x)$ y ahora es claro que $T(x) = \alpha$ $\square$

Observación 1. *El Teorema anterior, bien conocido para funciones continuas de una variable $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (**con la misma demostración**), es lo que se emplea para determinar que la norma $||\quad||_\infty$ sobre $C[a, b]$ está bien definida.*

Ejercicio 1. $(\,C([a, b], \mathbb{R}^n), ||\quad||_\infty\,)$ *es un espacio normado, donde $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ es el espacio de las trayectorias de $\mathbb{R}^n$ definidas sobre el intevalo de la recta $[a, b]$ o*
$$C([a, b], \mathbb{R}^n) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R}^n \ :\ f \ \textit{continua}\ \}$$
y donde
$$\begin{array}{rcll} ||\quad||_\infty \ :\ C([a, b], \mathbb{R}^n) & \to & [0, \infty) & \\ f & \to & ||f||_\infty & = \ \max\{\,||f(x)||_\infty \ :\ x \in [a, b]\,\}. \end{array}$$

- *Prueba que $C([a, b], \mathbb{R}^n)$ es un espacio vectorial*
- *Prueba que $||f||_\infty$ está bien definida (es decir que toda función continua sobre un intervalo cerrado alcanza su máximo).*
- *Prueba que $||f||_\infty$ es una norma (**Indicación:** si una función continua f verifica que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) \neq 0$, entonces prueba que $||f||_\infty > 0$).*

En un curso de Cálculo Diferencial se ve el siguiente resultado.

Teorema 2. *Un conjunto $K \subset \mathbb{R}^n$ es compacto si y solo si es cerrado y acotado.*

Este resultado que es muy útil en $\mathbb{R}^n$ sin embargo no se puede extender a espacios normados de dimensión (como espacios vectoriales) infinita ($\dim X = \infty$). Así en $(C[a,b], || \quad ||_\infty)$ la caracterización de compacidad es mucho más restrictiva y se conoce con el nombre de Teorema de Ascoli-Arzela (ver Análisis Funcional).

Ejemplo 1. *Se considera $(f_k(x) = x^k)_k \subset (C[0,1], || \quad ||_\infty)$. Este es un conjunto cerrado y acotado en $C[0,1]$ que no es compacto.*

Demostración: Por un lado $||x^k||_\infty \leq 1$, luego es un conjuto acotado. Ahora, es cerrado ya que una sucesión $g_j(x) = x^{k_j}$ es convergente (en norma $|| \quad ||_\infty$) si y solo si k_j es convergente (lo que sigue justifica esta afirmación). Ahora, no es compacto por que $(x^k)_k$ o cualquier subsucesión suya no converge uniformemente a ninguna función continua (ver Observación 3 más adelante) $\square$

CONVERGENCIA UNIFORME.

Las definiciones de **convergencia puntual y uniforme** de una **sucesión de funciones** suelen darse en un curso de Análisis Matemático de una variable.

Definición 2. *Sea $f_k : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, una sucesión de funciones. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.*

A: *Se dice que la sucesión de funciones $(f_k)_k$ **converge puntualmente** a la función f si para cada $x \in [a,b]$*

$$\lim_{k \to \infty} f_k(x) = f(x).$$

B: *Se dice que la sucesión de funciones $(f_k)_k$ **converge uniformemente** a la función f en $[a,b]$ si*

$$\text{para todo} \quad \epsilon > 0 \quad \text{existe} \quad k_0 \quad \text{de modo que, para todo} \quad k \geq k_0$$

$$\text{se tiene que} \qquad ||f(x) - f_k(x)||_\infty < \epsilon, \qquad \text{para todo} \qquad x \in [a,b].$$

Observación 2.

- *La convergencia uniforme siempre implica la convergencia puntual (**Ejercicio**). El recíproco no es cierto (**Ejercicio**).*
- *Decir que $(f_k)_k$ converge uniformemente a f en $[a,b]$ es lo mismo que decir que $(f_k)_k$ es una sucesión convergente a f en la norma del conjuto de funciones $|| \quad ||_\infty$ (**Aunque se denotan***

igual, no confundir al norma $|| \quad ||_\infty$ ***sobre*** $\mathbb{R}^n$ ***y la norma*** $|| \quad ||_\infty$ ***sobre*** $C([a,b],\mathbb{R}^n)$.

En un primer curso de Análisis Matemático se suele probar lo siguiente.

Teorema 3. *Sea* $f_k : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{N}$, *una sucesión de funciones que converge uniformente a una función* f.

A: *Si cada* f_k *es continua en* $[a,b]$, *entonces* f *es continua en [a,b] (la continuidad se conserva por la convergencia uniforme)*

B: *Si cada* f_k *es integrable en* $[a,b]$ *(entendendos que cada coordenada de* f_k *es integrable en* $[a,b]$*), entonces* f *es integrable en* $[a,b]$ *y además*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

donde $\int_a^b f(x)dx = (\int_a^b f_1(x)dx, \int_a^b f_2(x)dx, ..., \int_a^b f_n(x)dx) \in \mathbb{R}^n$.

Observación 3. *Las funciones* $x^k \in C[0,1]$, *son continuas y convergen puntualmente a una función no continua (Ejercicio). Por ello no pueden converger uniformemente sobre* $[0,1]$. *Además, esto prueba que* $(x^k)_k \subset (C[0,1], || \quad ||_\infty)$ *no puede ser un conjunto compacto.*

El Teorema anterior es esencial en las pruebas de los Teoremas de Existencia de soluciones de Ecuaciones Diferenciales.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es