COMPLETITUD.

Que las sucesiones de Cauchy (Ver Distancia) no sean siempre convergentes (esto solo puede ocurrir en espacios de dimensión infinita) es una molestia. En el conjunto de funciones que nos interesa por suerte no ocurre.

Teorema 1. ($C([a,b],\mathbb{R}^n), ||\quad||_\infty$) *es un espacio normado* ***completo***.

Demostración: Sea $(f_k(t))_k \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$ una suacesión de Cauchy. Lo que tenemos que probar es que es convergente. Dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe k_0 de modo que para $k_1, k_2 \geq k_0$ se tiene que

$$||f_{k_1} - f_{k_2}||_\infty = \max\{||f_{k_1}(t) - f_{k_2}(t)||_\infty \ : \ t \in [a,b]\,\} < \epsilon.$$

En paticular, para cada $t \in [a,b]$ la sucesión $(f_k(t))_k \subset \mathbb{R}^n$ es una sucesión de Cauchy y, como estamos en $\mathbb{R}^n$, convergente:

$$\exists \lim_{k\to\infty} f_k(t) = f(t).$$

La función f es el límite puntual de la sucesión $(f_k)_k$. Pero además,

$$\begin{array}{ccc} ||f_{k_1}(t) - f_{k_2}(t)||_\infty & \leq & \epsilon \\ \downarrow_{k_1\to\infty} & & \\ ||f(t) - f_{k_2}(t)||_\infty & \leq & \epsilon \end{array}$$

si $k_2 \geq k_0$ y para todo $t \in [a,b]$. Por tanto $(f_k)_k$ converge uniformemente a f en $[a,b]$; o dicho de otra forma

$$\lim_{k\to\infty} ||f - f_k||_\infty = 0,$$

donde esta norma es la del conjunto de funciones no la de $\mathbb{R}^n$.

Ahora, como tenemos convergencia uniforme y las funciones f_k son continuas, su límite uniforme f también lo es. Es decir $f \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$. Lo que termina la prueba $\square$

En los **espacios** normados **completos** se consigue un importante Teorema de Punto Fijo: **El Teorema de Punto Fijo de Banach**

(1920). Este Teorema es una generalización abstracta del procedimiento que uso Picard (a finales del siglo XIX) para probar su Teorema de Existencia de soluciones de E.D.O. de primer orden.

Teorema 2. *(**Teorema de la función contractiva** o del punto fijo de Banach). Sea $(X, ||\quad||$ un espacio normado completo. Sea una **aplicación***

$$T : X \to X$$

***contractiva** , es decir que existe $\alpha \in (0, 1)$ de modo que*

$$||T(x) - T(y)|| \leq \alpha||x - y||$$

*para todo $x, y \in X$. Entonces **existe** un único $a \in X$ de modo que*

$$T(a) = a$$

*(**un único punto fijo**).*

Demostración: Antes de empezar , observemos que una función contractiva es siempre continua.

Sea $x_0 \in X$ un punto cualquiera. Y definimos la sucesión recurrente

$$x_k = T(x_{k-1}) \qquad \text{para} \qquad k \leq 1.$$

Vamos a ver que esta sucesión $(x_k)_k \subset X$ es de Cauchy.

- Obsevemos que

  $$||x_{k+1} - x_k|| = ||T(x_k) - T(x_{k-1})|| \leq \alpha||x_k - x_{k-1}|| \leq .....$$

  repitiendo el proceso,

  $$.... \leq \alpha^k||x_1 - x_0||.$$

- Ahora usando la propiedad triangular de la norma

$$||x_{k+} - x_{k+m}|| \leq ||x_k - x_{k+1}|| + ||x_{k+1} - x_{k+2}|| + ... + ||x_{k+m-1} - x_{k+m}|| \leq$$

  usando lo anterior

  $$[\alpha^k + \alpha^{k-1} + ... + \alpha^{k+m-1}]||x_1 - x_0|| =$$

  usando la suma de la serie geométrica

  $$\frac{\alpha^k - \alpha^{k+m}}{1 - \alpha}||x_1 - x_0|| \to_{k\to\infty} 0.$$

  Lo que prueba que la sucesión es de Cauchy.

Ahora, como el espacio X es completo, la sucesión $(x_k)_k$ es convergente,

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_k = a \in X.$$

Este $a \in X$ es el punto fijo buscado. Claro, como T es continua y $x_k \to_{k\to\infty} a$ se sigue que

$$x_{k+1} = T(x_k) \to_{k\to\infty} T(a),$$

y por tanto $(T(a) = a$

Para ver que es el único punto fijo, supongamos que hay dos: a y b. Entonces

$$||a-b|| = ||T(a) - T(b)|| \leq \alpha ||a-b||.$$

Como $\alpha \in (0,1)$, lo anterior solo es posible si $||a-b|| = 0$ y por tanto $a = b$ $\square$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es