ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

LA FUNCIÓN f VISTA A TRAVÉS DE f' Y f''.

Dada una **función** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable, podemos considerar su función **derivada** $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Esta función a su vez puede ser derivable, y tendremos su derivada $(f')' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que escribimos por f'' y llamamos **derivada segunda** de la función f.

El estudio de f' y f'' nos da información sobre f, como vamos a ver.

Ejemplo. 1. *Si* $f(x) = x^3 + x + 1$, *entonces* $f'(x) = 3x^2 + 1$ *y* $f''(x) = 6x$.

Observación. 1. *Si un fenómeno físico viene dado por una función* $f(t)$, *donde* t *representa el tiempo, entonces* f' *es la velocidad del proceso y* f'' *es la aceleración del mismo.*

Estudio del crecimiento de una función.

Una característica importante de las funciones es su **crecimiento**. En concreto:

Definición. 1. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función.*

a: *Se dice que* f *es* ***monótona creciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \leq f(y).$$

b: *Se dice que* f *es* ***monótona decreciente*** *si para todo* $x, y \in Domf$ *de modo que* $x < y$, *se tiene que*

$$f(x) \geq f(y).$$

□

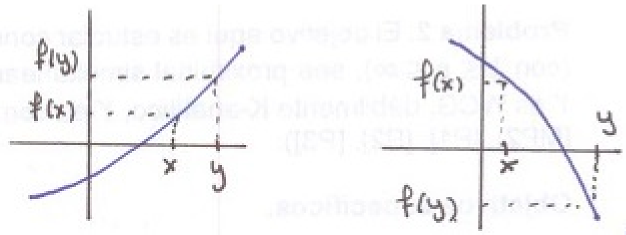

FIGURA 1. Funciones monótonas.

Una función no tiene por que tener un crecimiento único. Es decir, en parte de su dominio puede crecer y en parte decrecer. Esto se puede descubrir mirando el signo de su derivada si es una función derivable.

Teorema. 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).*

a:
- *Si $f'(c) > 0$, para todo $c \in (a, b)$, entonces f es **creciente** en $[a, b]$.*
- *Si f es creciente en $[a, b]$, entonces $f'(c) \geq 0$ para todo $c \in (a, b)$.*

b:
- *Si $f'(c) < 0$, para todo $c \in (a, b)$, entonces f es **decreciente** en $[a, b]$.*
- *Si f es decreciente en $[a, b]$, entonces $f'(c) \leq 0$ para todo $c \in (a, b)$.*

Demostración: Dejamos **b)** como ejercicio, se hace de la misma manera que la parte **a).**

Sean $x < y$ elementos de $[a, b]$. Por el Teorema de Valor Medio existe $c \in (x, y)$ de modo que

$$f(y) - f(x) = f'(c)(y - x) > 0.$$

La desigualdad se tiene ya que por hipótesis $f'(c) > 0$. Luego, despejando, $f(y) \geq f(x)$.

Por otro lado sea $c \in (a, b)$. Si f es creciente, entonces mirando signos

$$\text{para} \quad x > c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

$$\text{para} \quad x < c, \qquad \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Por tanto

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

□

Ejemplo. 2. *Consideramos la función* $f(x) = \frac{1}{x}$. *Derivando* $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0$, *para todo* $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. *Luego, aplicando el Teorema anterior, la función es decreciente en la semirecta* $(-\infty, 0)$ *y en la semirecta* $(0, \infty)$. *Observemos que la discontinuidad en el punto* $x = 0$ *nos impide afirmar lo mismo en todo el dominio de la función* $\mathbb{R}\backslash\{0\}$.

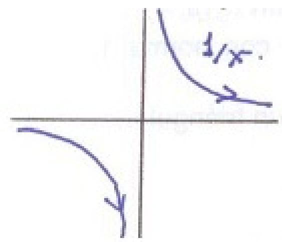

FIGURA 2. Función monótona decreciente.

Estudio de la convexidad de una función.

Antes de comenzar veamos otra forma de escribir los números de un intervalo cerrado.

Lema. 1.

$$[a, b] = \{c \in \mathbb{R} \;:\; c = \alpha a + (1-\alpha)b, \quad \textit{para algún} \quad \alpha \in [0,1]\,\}$$

Si $c = \alpha a + (1-\alpha)b$, para $\alpha \in [0,1]$, decimos que c es una **combinación convexa** de a y b.

Demostración: Si $c = \alpha a + (1-\alpha)b$, entonces $c = b - \alpha(b-a) \leq b$. Por otro lado $c = a + (1-\alpha)(b-a) \geq a$, luego $c \in [a, b]$.

Por otro lado si $c \in [a, b]$

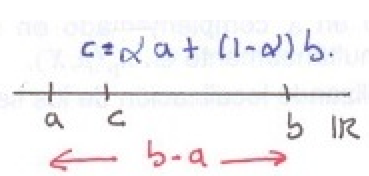

FIGURA 3. c entre a y b.

entonces

$$c = \frac{b-c}{b-a}a + \frac{c-a}{b-a}b.$$

Es claro que $0 \leq \dfrac{b-c}{b-a} \leq 1$ y además

$$1 - \frac{b-c}{b-a} = \frac{c-a}{b-a}$$

□

Con la noción de combinación convexa es más fácil entender los conceptos de **convexidad** y **concavidad** de una función.

Definición. 2. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***convexa*** *en $[a,b]$ si para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Observemos que

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) = \alpha(f(x) - f(y)) + f(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(\alpha(x-y)) + f(y)$$

$$= \frac{f(x) - f(y)}{x - y}([\alpha x + (1-\alpha)y] - y) + f(y) = r(\alpha x + (1-\alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

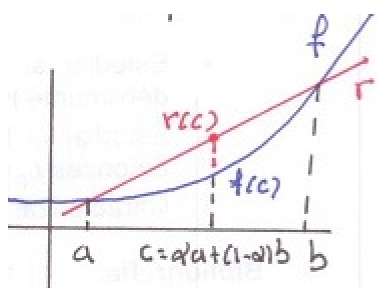

Figura 4. Función convexa.

Observación. 2. *Un función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es convexa si y solo si su gráfica en el intervalo $[x,y]$ queda por debajo de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$.*

Definición. 3. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función. Se dice que la función es* ***concava*** *en $[a,b]$ si para todo $x, y \in [a,b]$ con $x < y$ se tiene que*

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

Obsevemos que

$$\alpha f(x) + (1-\alpha) f(y) = \alpha(f(x) - f(y)) + f(y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}(\alpha(x-y)) + f(y)$$

$$= \frac{f(x) - f(y)}{x - y}([\alpha x + (1 - \alpha)y] - y) + f(y) = r(\alpha x + (1 - \alpha)y),$$

donde r es la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$.

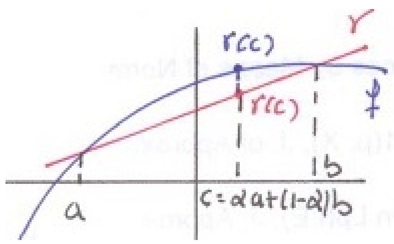

FIGURA 5. Función concava.

Observación. 3. *Un función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es concava si y solo si su gráfica en el intervalo $[x, y]$ queda por encima de la recta que une los puntos $(x, f(x))$ y $(y, f(y))$, para todo $x, y \in [a, b]$ con $x < y$.*

Como en el caso del crecimiento, una función puede ser concava en parte de su dominio y convexa en la otra parte. La forma de descubrir la forma de la función es mirar el signo de su derivada segunda, siempre que ésta exista.

Teorema. 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable.*

a:
- *f es convexa en $[a, b]$ si y solo si f' es creciente.*
- *Si existe f'' y $f'' > 0$ en $[a, b]$, entonces f es **convexa** en $[a, b]$.*

b:
- *f es concava en $[a, b]$ si y solo si f' es decreciente.*
- *Si existe f'' y $f'' < 0$ en $[a, b]$, entonces f es **concava** en $[a, b]$.*

Demostración: a) El siguiente dibujo nos debe convencer de que la convexidad es equivalente al crecimiento de la derivada.

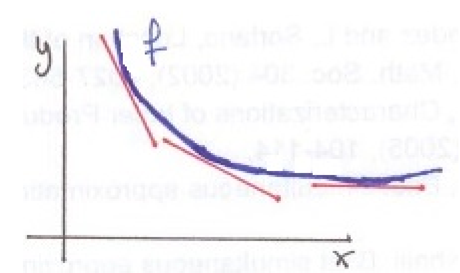

FIGURA 6. Demostración sin palabras.

La prueba formal es un poco más engorrosa y no la vemos.

Ahora si existe la derivada segunda f'' y es positiva, entonces la función derivada f' es creciente y por lo anterior la función es convexa.

El apartado **b)** es análogo al anterior $\square$

Ejemplo. 3. *Sea $f(x) = x^2$. Así $f'(x) = 2x$. Luego la función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Además $f''(x) = 2 > 0$, luego la función es convexa en toda la recta.*

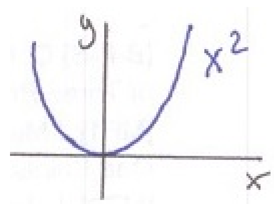

FIGURA 7. Función convexa.

Ejemplo. 4. *Sea $f(x) = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2})}$, donde $x \in [0, a]$. Esta función es decreciente y concava.*

Demostración: Derivando

$$f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} \frac{2xb^2}{a^2}.$$

Esta derivada es negativa si $x \in (0, a)$ y por tanto la función decrece. Obsevemos que $f'(0) = 0$ y que $\lim_{x \to a^-} f'(x) = -\infty$.

Volviendo a derivar

$$f''(x) = -\frac{b^2}{a^2} \frac{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})} - x(\frac{-1}{2\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} \frac{2xb^2}{a^2})}{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2} \left[\frac{1}{\sqrt{b^2(1-\frac{x^2}{a^2})}} + \frac{b^2x^2}{a^2(b^2(1-\frac{x^2}{a^2}))^{\frac{3}{2}}} \right]$$

que es negativo si $x \in (0, a)$. Por tanto la función es concava $\square$

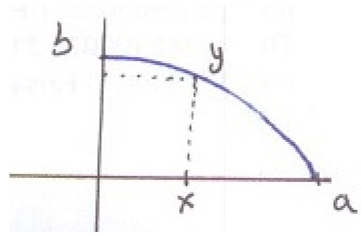

FIGURA 8. Función concava.

Ejercicio. 1. *Sea* $f(x) = \operatorname{sen} x$ *para* $x \in [0, \pi]$. *Se toman* $x_0, a, b \in [0, \pi]$, *con* $x_0 \leq a < b$. *Prueba que* $f'(x_0) \geq \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Demostración: La función $f(x) = \operatorname{sen} x > 0$ para $x \in [0, \pi]$. Además es una función concava ya que $f'(x) = \cos x$ y $f''(x) = -\operatorname{sen} x < 0$.

FIGURA 9. Función seno.

$\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ es la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$. por el Teorema del Valor Medio existe un $c \in (a, b)$ de modo que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

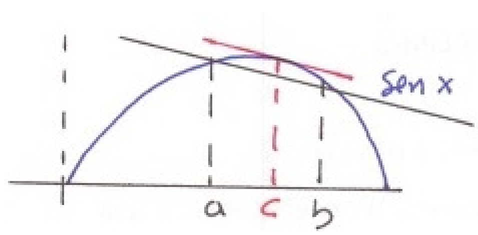

FIGURA 10. Teorema del Valor Medio.

Como la función es concava su derivada es una función decreciente y por tanto como $x_0 \leq a < c < b$ se tiene que

$$f'(x_0) \geq f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

□

Puntos Críticos.

El signo de la derivada y de la derivada segunda de una función nos da información de la misma. También lo hacen los puntos donde estas derivadas se anulan.

Definición. 4. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función derivable.*

- **a:** *Se dice que un punto* $x_0 \in Domf$ *es un* ***punto crítico*** *de* f *si* $f'(x_0) = 0$.

b: *Dado un punto $x_0 \in Domf$ se dice que es un* ***punto de inflexión*** *de f si existe $\delta > 0$ de modo que*

$$f \quad \text{es convexa en} \quad (x_0 - \delta, x_0)$$

y

$$f \quad \text{es concava en} \quad (x_0, x_0 + \delta)$$

o diceversa.

Observación. 4.

- *Los puntos críticos de una función son candidatos a máximos o mínimos relativos de la función, y por tanto puntos donde puede cambiar el crecimiento de la función.*
- *Los candidatos a puntos de inflexión son los puntos críticos de la función derivada (es decir, si existe f'', los puntos x_0 para los cuáles $f''(x_0) = 0$).*

Teorema. 3. *Sea una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y supongamos que existe f'' en (a,b).*

a:
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ son $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) > 0$, entonces x_0 es un mínimo local.*
- *Sea $x_0 \in (a, b)$ son $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$, entonces x_0 es un máximo local.*

b: *Sea $x_0 \in (a, b)$ un punto de inflexión de f, entonces $f''(x_0) = 0$.*

Demostración: a) El signo de la derivada segunda hace referencia a la forma de la gráfica y de ella podemos deducir si el punto crítico x_0 es un máximo o un mínimo.

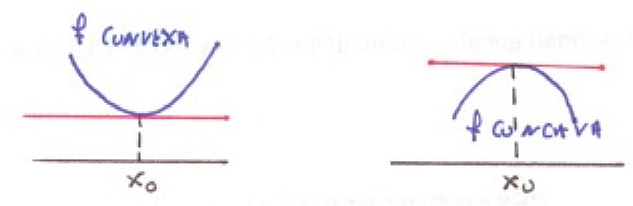

FIGURA 11. Demostración sin palabras.

La demostración rigurosa la veremos en el Tema de Aproximación Polinómica.

b) Por el Corolario a la Regla de L'Hôpital sabemos que

$$\lim_{x \to x_0^-} f''(x) = f''(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0^+} f''(x) = f''(x_0).$$

Si f es convexa en $(x_0-\delta, x_0)$, entonces f' es creciente y por tanto $f''(x) \geq 0$ para $x \in (x_0-\delta, x_0)$.

Si f es concava en $(x_0, x_0+\delta)$, entonces f' es decreciente y por tanto $f''(x) \leq 0$ para $x \in (x_0-\delta, x_0)$.

De lo que se deduce que necesariamente $f''(x_0) = 0$. El argumento es el mismo si f es concava en $(x_0-\delta, x_0)$ y convexa en $(x_0, x_0+\delta)$

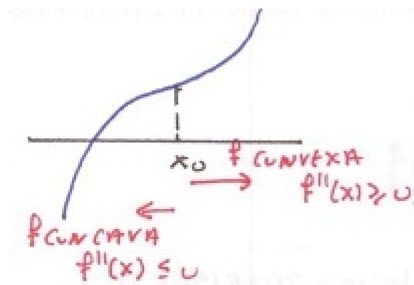

FIGURA 12. Punto de inflexión.

□

El Teorema anterior es útil para localizar puntos de inflexión. La derivada segunda no es muy determinante sin embargo para determinar en la práctica los extremos locales. Es más rápido y fácil determinar el signo de f'.

Ejemplo. 5. *Consideramos la función $f(x) = x^3$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 3x^2$. Luego en $x = 0$ tenemos un punto crítico. Como $f' > 0$, la función siempre crece, luego $x = 0$ no es ni un máximo ni un mínimo. Además $f''(x) = 6x$. Asi $f''(x) < 0$ si $x < 0$ y por tanto f es concava en $(-\infty, 0)$. Como $f''(x) > 0$ si $x > 0$, por tanto f es convexa en $(0, \infty)$.

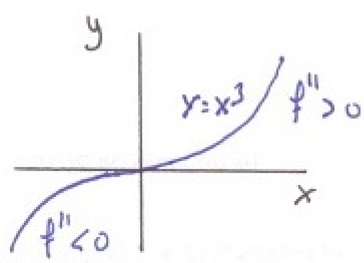

FIGURA 13. $x = 0$ punto de inflexión.

□

Ejemplo. 6. *Consideramos la función $f(x) = x^4$. ¿Qué ocurre en $x = 0$?*

Demostración: $f'(x) = 4x^3$, así $f' < 0$ si $x < 0$ y $f' > 0$ si $x > 0$. Luego f decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, \infty)$. Luego en el punto crítico $x = 0$ solo puede haber un mínimo.

Por otro lado $f''(x) = 12x^2 \geq 0$, luego la función es convexa en toda la recta. En el punto $x = 0$, aunque $f''(0) = 0$ **no** tenemos un punto de inflexión.

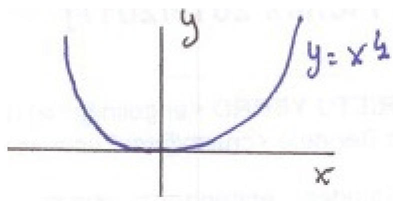

FIGURA 14. $f''(0) = 0$, pero **no** es un punto de inflexión.

□

REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es