ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES SIMPLES.

Cuando tenemos una función racional

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

es decir un cociente de polinomios, a veces es conveniente simplificar su expresión. Vamos a estudiar algunas cuestiones sobre polinomios que nos ayudarán en esa dirección.

Notación: Sea un polinomio con coeficientes reales

$$P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

así $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$. El conjunto de polinomios con coeficiente reales lo llamaremos $\mathbb{R}[x]$ y así escribiremos $P \in \mathbb{R}[x]$. Llamaremos **grado** del polinomio $P = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a n si $a_n \neq 0$.

División de polinomios. Dados dos polinomios $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ se pueden dividir de modo que existen $q, r \in \mathbb{R}[x]$ con

$$P(x) = q(x)Q(x) + r(x)$$

de modo que el grado de r, **el resto** , es menor que el de Q (**Teorema del Resto para Polinomios.**)

En el Tema de Números estudiamos el Teorema del Resto para números enteros. De forma similar se hace para polinomios.

Ejemplo. 1. *Vamos a dividir el* $P(x) = 3x^3 - x + 1$ *entre* $Q(x) = x^2 + 1$.

Demostración:

$$\begin{array}{rl} 3x^3 \ \ - x + 1 & |\underline{x^2 + 1} \\ \underline{-3x^3 - 3x} & \quad 3x \\ -4x + 1 & \end{array}$$

Y así $P(x) = 3xQ(x) - 4x + 1$ $\square$

Raíces de un polinomio. Dado un polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ decimos que que α es una **raíz** del polinomio si $P(\alpha) = 0$.

Teorema. 1. *Si α es una raíz del polinomio P, entonces $x-\alpha$ divide a P, es decir existe q polinomio tal que*

$$P(x) = q(x)(x-\alpha).$$

Demostración: Dividiendo $P(x)$ entre $(x-\alpha)$, tenemos

$$P(x) = q(x)(x-\alpha) + r,$$

con grado de r menor que 1, luego r es un número. Además

$$0 = P(\alpha) = q(\alpha)(\alpha-\alpha) + r.$$

Así $r = 0$. $\square$

Teorema. 2. ***(Fundamental del Álgebra.)*** *Todo polinomio $P \in \mathbb{R}[x]$ de grado n tienen n raíces que pueden ser reales o complejas y no necesariamente distintas.*

Ejemplo. 2. *Sea $P(x) = (x-3)^2(x^2+1)$. Este es un polinomio de grado 4 (hacer la multiplicación) que tiene por raíces a $\alpha = 3$ dos veces y las raíces complejas $\alpha = i$ y $\alpha = -i$.*

Teorema. 3. *Sea $P \in \mathbb{R}[x]$ un polinomio con coeficientes reales.*

- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces su conjugado $a - bi$ también es una raíz de P.*
- *El polinomio $(x-(a+bi))(x-(a-bi)) = x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \in \mathbb{R}[x]$ tiene coeficientes reales.*
- *Si $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ es una raíz de P, entonces el polinomio de segundo grado $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ divide a P.*

El Teorema Fundamental del Álgebra es difícil de probar, queda fuera de nuestro alcance. El Teorema anterior se entenderá al estudiar un poco sobre números complejos $\mathbb{C}$.

Descomposición de polinomios. Con los resultados anteriores no es muy difícil probar que todo todo polinomio de coeficientes reales se puede escribir como un producto de potencias de polinomios de grado 1 y 2.

Corolario. 1. *Sea $Q(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ un polinomios de coeficientes reales y grado m. Q se puede escribir como*

$$Q(x) = b_m(x-\alpha_1)^{r_1}....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2-2a_1x+a_1^2+b_1^2)^{s_1}....(x^2-2a_jx+a_j^2+b_j^2)^{s_j}$$

donde $\alpha_1, .., \alpha_i$ *son las raíces reales de* Q *y* $a_1 \pm b_1 i, ..., a_j \pm b_j i$ *las complejas. Además*

$$r_1 + r_2 + ... + r_i + 2(s_1 + ... + s_j) = m.$$

Descomposición en Fracciones Simples.

Dado un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$, donde el grado de P es menor que el de Q, se puede escribir este cociente como suma de fracciones de polinomios más sencillos. Esto es lo que nos dice el siguiente Teorema.

Teorema. 4. *Dados dos polinomios* $P, Q \in \mathbb{R}[x]$ *con grado de* P *menor que el de* Q *y donde tenemos la descomposición*

$$Q(x) = (x-\alpha_1)^{r_1} ....(x-\alpha_i)^{r_i}(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1} ....(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j},$$

entonces se pueden encontrar números reales $c_{*,*}, d_{*,*}$ *y* $k_{*,*}$ *tales que*

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= [\frac{c_{1,1}}{(x-\alpha_1)} + \frac{c_{1,2}}{(x-\alpha_1)^2} + ... + \frac{c_{1,r_1}}{(x-\alpha_1)^{r_1}}] + ... \\ & .... + [\frac{c_{i,1}}{(x-\alpha_i)} + \frac{c_{i,2}}{(x-\alpha_i)^2} + ... + \frac{c_{i,r_i}}{(x-\alpha_i)^{r_i}}] \\ & + [\frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2} + ... + \frac{d_{1,s_1}x + k_{1,s_1}}{(x^2 - 2a_1 x + a_1^2 + b_1^2)^{s_1}}] + ... \\ & .... + [\frac{d_{j,1}x + k_{j,1}}{x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2} + ... + \frac{d_{j,s_j}x + k_{j,s_j}}{(x^2 - 2a_j x + a_j^2 + b_j^2)^{s_j}}]. \end{aligned}$$

Ejemplo. 3. *Sea la función racional*

$$f(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1}.$$

¿Como se descompone en fracciones simples?

Demostración: Lo primero que tenemos que hacer es descomponer el denominador. Esto **no siempre es posible.** En este caso es fácil ver que $\alpha = 1$ es una raíz, que es doble y dividiendo el polinomio por $(x-1)^2$ se ve que

$$x^6 - 2x^5 + 3x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2+1)^2(x-1)^2.$$

Ahora, el Teorema anterior nos dice que

$$f(x) = \frac{3x^2+1}{(x^2+1)^2(x-1)^2} = \frac{c_{1,1}}{x-1} + \frac{c_{1,2}}{(x-1)^2} + \frac{d_{1,1}x + k_{1,1}}{x^2+1} + \frac{d_{1,2}x + k_{1,2}}{(x^2+1)^2}.$$

¿Como se calculan de forma efectiva los coeficientes de arriba? La de arriba es una ecuación. Operamos la parte de la derecha de la ecuación hasta que nos quede una única fracción e igualamos numeradores. Nos tendrá que quedar un sistema de seis ecuaciones lineales con seis incógnitas (las que tenemos) y lo resolvemos. De hecho lo que dice el Teorema de arriba es que este sistema tiene solución única. $\square$

Aplicaciones de la Descomposición en Fracciones Simples Es una técnica muy usual que se aplica con frecuencia. Veamos algunos ejemplos.

- En el Tema de Series empleamos este método con las series Telescópicas.
- Se usa para calcular primitivas de funciones racionales.
- La **Transformada de Laplace** es una herramienta matemática que se usa para resolver algunas **Ecuaciones Diferenciales**. En particular las que describen algunos circuítos eléctricos. Es por tanto una herramienta útil en **Teoría de la Señal.** La Transformada de Laplace se estudia en cursos superiores. Allí para calcular transformadas Inversas se usa el método de Descomposición en Fracciones Simples.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`