HOJA 2.

PROBLEMA 1:

a) - 3) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 \operatorname{sen} x$

PUNTO ESCRIBIR $y'(x) = y^2(x) \operatorname{sen} x$

E.D.O. DE 1er. ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS.

CLARAMENTE $y \equiv 0$ ES UNA SOLUCIÓN ESTACIONARIA

SI $y \neq 0$, EN DOM CTS.

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = \operatorname{sen} x$$

E INTEGRANDO

$$\int \frac{y'(x)}{y^2(x)}\,dx = -\frac{1}{y(x)} \; ; \qquad \int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k$$

LUEGO $-\dfrac{1}{y(x)} = -\cos x + k \qquad k \in \mathbb{R}$, POR TANTO

$$y(x) = \frac{1}{\cos x + k} \qquad k \in \mathbb{R}$$

SI $|k| > 1 \Rightarrow$ Dom $y = \mathbb{R}$.

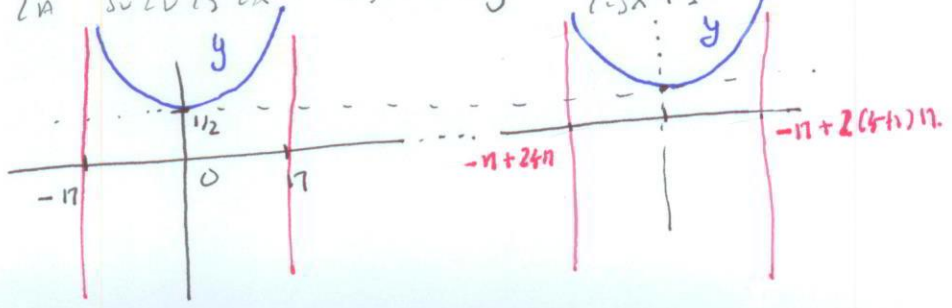
SI $|k| \leq 1 \Rightarrow$ Dom $y = \mathbb{R} \setminus \{ r : \cos r = -k \}$

b- III $\begin{cases} y' = y^2 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 1/2 \end{cases}$ CUYA $y(x) = \dfrac{1}{\cos x + k}$

$$y(0) = \frac{1}{\cos 0 + k} = 1/2$$

POR TANTO $\dfrac{1}{1+k} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow 1 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{k}{2}$ ASÍ $\boxed{k = 1}$

Y LA SOLUCIÓN ES $y = \dfrac{1}{\cos x + 1}$ Dom $y = \mathbb{R} \setminus \{-\pi + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$



HOJA 2:

PROBLEMA 1:

b) - IV) $y' x^3 \operatorname{sen} y = 2$, $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi/3$

LA ECUACIÓN DIFERENCIAL ES $y'(x) \operatorname{sen} y(x) = \frac{2}{x^3}$

OBSERVEMOS QUE LA ECUACIÓN NO TIENE SOLUCIÓN PARA $x = 0$.

ES DE VARIABLES SEPARADAS

INTEGRAMOS $\int y'(x) \operatorname{sen} y(x)\, dx = -\cos y(x)$

$$\int \frac{2}{x^3} = -\frac{1}{x^2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$$

LUEGO $\cos y(x) = \frac{1}{x^2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA.

EL $\operatorname{Dom} y$ DEPENDERÁ DE k | $\left|\frac{1}{x^2} + k\right| \le 1$

PARA $k \ge 1$ $\operatorname{Dom} y = \emptyset$

PARA $k \in (0,1)$ $\frac{1}{x^2} + k \le 1 \iff \frac{1}{x^2} \le 1 - k$

$\iff x^2 \ge \frac{1}{1-k}$

$k \neq 1$

$\iff |x| \ge \sqrt{\frac{1}{1-k}}$.

etc.

SI BUSCAMOS LA SOLUCIÓN TAL QUE $\lim_{x\to\infty} y(x) = \pi/3$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} \cos y(x) = \cos \pi/3$

Y $\lim_{x\to\infty} = -\frac{1}{x^2} + k = k$

LUEGO $k = \cos \pi/3 \in (0,1)$.

HOJA 2:

Problema 5:

a) - 2) $\quad \dfrac{dy}{dx} + 2y = \cos x$

$\Leftrightarrow \quad y'(x) = -2y(x) + \cos x$ ED LINEAL DE 1: ORDEN NO HOMOGÉNEA

1:] SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA.

$$y(x) = k e^{-2x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

OBSERVAMOS QUE LA ED LINEAL HOMOGÉNEA $y'(x) = a\,y(x)$ $a = cte$, TIENE POR SOLUCIÓN $y(x) = k e^{ax}$.

2:] CALCULAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE $y'(x) = -2y(x) + \cos x$ POR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

TOMAMOS $y_0(x) = k(x)\, e^{-2x}$

$y_0'(x) = k'(x)\, e^{-2x} - 2k(x) e^{-2x}$

ENTRAMOS EN LA E.D. CON y, ASÍ

$$k'(x) e^{-2x} - 2k(x) e^{-2x} = -2k(x) e^{-2x} + \cos x$$

$$\Rightarrow k'(x) = e^{2x} \cos x$$

INTEGRANDO $\quad k(x) = \int e^{2x} \cos x\, dx = \dfrac{e^{2x}}{2}\cos x + \int \dfrac{e^{2x}}{2} \operatorname{sen} x\, dx =$

$= \dfrac{e^{2x}}{2}\cos x + \dfrac{e^{2x}}{4}\operatorname{sen} x - \int \dfrac{e^{2x}}{4}\cos x\, dx$ (PARTES)

DESPEJANDO $\quad \left(1 + \dfrac{1}{4}\right)\int e^{2x}\cos x\, dx = \dfrac{e^{2x}}{2}\left[\cos x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\right]$

LUEGO $\quad y_0 = \dfrac{4}{5}\dfrac{e^{2x}}{2}\left[\cos x + \dfrac{\operatorname{sen} x}{2}\right] e^{-2x} = \dfrac{2\cos x}{5} + \dfrac{\operatorname{sen} x}{5}$

ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR

$$y(x) = \frac{2\cos x}{5} + \frac{\operatorname{sen} x}{5} + k e^{-2x} \qquad k \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN GENERAL

HOJA 2:

Problema 5c)

b)-II)
$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} - 3y = -2e^{-2t} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y'(t) = 3y(t) - 2e^{-2t} \\ y(0) = 5 \end{cases}$$

Solución General de la ecuación $y'(t) = 3y(t)$

$$y(t) = k e^{3t} \quad k \in \mathbb{R}$$

Solución particular: Proponemos

$y_0(t) = k(t) e^{3t}$

$y_0'(t) = k'(t) e^{3t} + 3k(t) e^{3t}$, introducimos en la E.D.O

con y_0 $\quad k'(t) e^{3t} + 3k(t) e^{3t} = 3k(t) e^{3t} - 2e^{-2t}$

$$\Rightarrow k'(t) = -2e^{-2t} e^{-3t} = -2e^{-5t}.$$

Luego $\quad k(t) = \int k'(t)\,dt = \int -2e^{-5t}\,dt = \frac{2}{5} e^{-5t}$

Solución General de la E.D.O Lineal

$$y(t) = \frac{2}{5} e^{-5t} e^{3t} + k e^{3t} =$$

$$= \frac{2}{5} e^{-2t} + k e^{3t} \quad k \in \mathbb{R}$$

Como la solución que buscamos verifica $y(0) = 5$, tenemos

$$5 = y(0) = \frac{2}{5} e^{0} + k e^{0}$$

Así $\quad k = 5 - \frac{2}{5} = \frac{23}{5}$

Y la solución buscada es:

$$y(t) = \frac{2}{5} e^{-2t} + \frac{23}{5} e^{3t}.$$

HOJA 2:

PROBLEMA 10:

Si t es el tiempo y $C_{14}(t)$ es la cantidad de núcleos de este isótopo en el tiempo t.

Tenemos que: $t=0 \quad C_{14}(0) = C_{14}$ Número en el que nuestra planta.

Por otro lado $\frac{C_{14}}{C_{12}} = r \iff C_{14} = r\,C_{12}$.

La desintegración radiactiva es un proceso cuya velocidad es proporcional a la cantidad de núcleos (física!). Así.

$$\begin{cases} C'_{14}(t) = k\,C_{14}(t) \\ C_{14}(0) = C_{14} \end{cases}$$

Ecuación diferencial de 1er orden homogénea con condición inicial

cuya solución es

$$C_{14}(t) = k_1 e^{-kt}$$

y como $C_{14}(0) = C_{14} = k_1 \Rightarrow$ $\boxed{C_{14}(t) = C_{14}\, e^{-kt}}$

Vamos a calcular k con el dato $C_{14} = 2\,C_{14}(5700)$

(la vida media es el tiempo que se necesita para que nuestra muestra reduzca la mitad de núcleos C_{14})

Luego $C_{14} = 2\,C_{14}\, e^{k(5700)}$.

$k = (\ln 1/2)\frac{1}{5700} < 0$ ya que $\ln 1/2 < 0$.

Por tanto $C_{14}(t) = C_{14}\, e^{-\frac{t \ln 2}{5700}}$

Luego a hora para $t = 2000$, si el carbono 14 se desintegra en carbono 12 (física!)

$$C_{12}(2000) = C_{12} + (C_{14} - C_{14}(2000)).$$

y $C_{14}(2000) = C_{14}\, e^{-\frac{2000}{5700}\ln 2}$.

Luego $$\frac{C_{14}(2000)}{C_{12}(2000)} = \frac{C_{14}\, e^{-\ln 2\left(\frac{2000}{5700}\right)}}{C_{12} + C_{14} - C_{14}\, e^{-\ln 2\left(\frac{20}{57}\right)}} =$$

$$= \frac{r\, e^{-\ln 2\left(\frac{20}{57}\right)}}{1 + r - r\, e^{-2\ln 2\left(\frac{20}{57}\right)}}$$

$C_{14} = r\,C_{12}$

OBSERVACIÓN Si en un tiempo "t_0" hay una concentración mínima

$$r = \frac{C_{14}(t)}{C_{12}(t)}$$

como

$$r = \frac{r\, e^{-\frac{\ln 2}{5700} t}}{1 + r - e^{-\frac{\ln 2}{5700} t}} = \frac{r e^{-bt}}{1 + r - e^{-bt}}$$

$$b = \frac{\ln 2}{5700}$$

multiplicando e^{-bt}

$$k + rk - k e^{-bt} = r e^{-bt}$$

luego $k + rk = (k + r) e^{-bt}$

y así $e^{-bt} = \frac{k(1+r)}{k+r}$

luego $\boxed{t = -\frac{1}{b} \ln \frac{k(1+r)}{k+r} = -\frac{5700}{\ln 2} \cdot \ln \frac{k(1+r)}{k+r}}$

así se puede hallar t, la edad de una datación con carbono 14!

$$\int y''\, dx = \int u\, v u^{-2}$$

HOJA 2:

PROBLEMA 11:

- $y'''(x) = xe^x$, con $y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

INTEGRAMOS $y''(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx =$ (por partes)

$= xe^x - e^x + k$

como $y''(0) = 0 \Rightarrow k = 1$

LUEGO $y'(x) = \int xe^x - e^x + 1\, dx =$

$= xe^x - e^x - e^x + x + k$

como $y'(0) = 0 \Rightarrow k = 2$

$y(x) = \int xe^x - 2e^x + x + 2\, dx =$

$= xe^x - e^x - 2e^x + \frac{x^2}{2} + x + k$

como $y(0) = 0 \Rightarrow k = 3$

ASÍ $\boxed{y(x) = xe^x - 3e^x + \frac{x^2}{2} + x + 3}$

- $y''^2 + y'^2 = y'^4$ ORDENAMOS

$y''^2 = y'^4 - y'^2 = y'^2[y'^2 - 1]$

ASÍ $y'' = y'\sqrt{y'^2 - 1}$ ES UNA ECUACIÓN DE VARIABLES SEPARADAS

$\int \frac{y''}{y'\sqrt{y'^2 - 1}}\, dx = \int \frac{1}{u\sqrt{u^2 - 1}}\, du = x + k$ $\quad u = y'$

SOLUCIÓN IMPLÍCITA