HOJA 3ª

PROBLEMA 1: — $(\lambda+1)\lambda = \lambda^2+\lambda = 0$.

ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA; LUEGO

$y''(x) + y'(x) = 0$ ES LA E.D.O BUSCADA.

O TAMBIÉN $(D-1)\,D\,y = (D-1)\,y' =$

$= D y' - y' = y'' - y' = 0.$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O ES

$$\boxed{y(x) = k_1 + k_2 e^{-x} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.}$$

— SI LOS AUTOVALORES DE LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA SON $\lambda_1 = -1$ Y $\lambda_2 = 2$

LA FUNCIÓN

$$\boxed{y(x) = k_1 e^{-x} + k_2 e^{2x} \qquad k_1, k_2 \in \mathbb{R}}$$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

$0 = (D+1)(D-2)\,y = (D+1)(y' - 2y) =$

$= D(y' - 2y) + y' - 2y = \boxed{y'' - y' - 2y}$

O TAMBIÉN $\left[0 = (\lambda+1)(\lambda-2) = \lambda^2 - \lambda - 2\right]$

ES LA ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

SIENDO LA E.D.O CORRESPONDIENTE

ES $y'' - y' - 2y = 0.$

HOJA 3:

PROBLEMA 2:

2) $y'' - 8y' + 15y = 0$

LA EC CARACTERÍSTICA ASOCIADA ES $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

CLARAMENTE $\lambda^2 - 8\lambda + 15 = (\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$

ASÍ $\boxed{y(x) = k_1 e^{5x} + k_2 e^{3x}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

7) $y'' + 4y = 0$ EC CARACTERÍSTICA

$\lambda^2 + 4 = (\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0$

SOLUCIÓN GENERAL

$\boxed{y(x) = k_1 e^{-2x} + k_2 e^{2x}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

PROBLEMA 3:

1) $y'' + 3y' - 10y = 6e^{4x}$

EC CARACTERÍSTICA DE LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA

$\lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda + 5)(\lambda - 2) = 0$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA ES

$y(x) = k_1 e^{-5x} + k_2 e^{2x}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

COMO 4 NO ES RAÍZ DE LA EC. CARACTERÍSTICA

PROPONEMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O

$$\left.\begin{aligned} y_0(x) &= k e^{4x} \\ y_0'(x) &= 4k e^{4x} \\ y_0''(x) &= 16 k e^{4x} \end{aligned}\right\}$$ ENTRANDO EN LA E.D.O

$16ke^{4x} + 3(4ke^{4x}) - 10ke^{4x} =$

$= ke^{4x}[16 + 12 - 10] = 6e^{4x}$

FORZAMOS A QUE SE CUMPLA LA E.D.O

LUEGO $k = \frac{6}{18} = 1/3$;

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O ES

$\boxed{y(x) = 1/3\, e^{4x} + k_1 e^{5x} + k_2 e^{2x}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

HOJA 3:

PROBLEMA 3:

5:) $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$

EC CARACTERÍSTICA DE LA HOMOGÉNEA ASOCIADA

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm i$$

ASÍ $y(x) = k_1 e^x \cos x + k_2 e^x \operatorname{sen} x$ k_1, k_2

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA

$1+i$ ES RAÍZ DE LA EC CARACTERÍSTICA ASÍ

PROBAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O DE LA FORMA

$$y_0 = A x e^x \operatorname{sen} x + B x e^x \cos x =$$

$$= x e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x]$$

$$y_0' = e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x] + x e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x] + x e^x [A \cos x - B \operatorname{sen} x] =$$

$$= e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x] + x e^x [(A-B) \operatorname{sen} x + (A+B) \cos x]$$

$$y_0'' = e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x] + e^x [A \cos x - B \operatorname{sen} x] + e^x [(A-B) \operatorname{sen} x + (A+B) \cos x] + x e^x [(A-B) \operatorname{sen} x + (A+B) \cos x] + x e^x [(A-B) \cos x - (A+B) \operatorname{sen} x] =$$

$$= 2e^x [(A-B) \operatorname{sen} x + (A+B) \cos x] + x e^x [-2B \operatorname{sen} x + 2A \cos x]$$

INTRODUCIMOS EN LA ECUACIÓN DIFERENCIAL:

$$e^x \operatorname{sen} x = \cancel{2e^x [(A-B) \operatorname{sen} x + (A+B) \cos x]} + x e^x [\cancel{-2B \operatorname{sen} x} + \cancel{2A \cos x}]$$

$$- \cancel{2e^x [A \operatorname{sen} x + B \cos x]} - 2x e^x [\cancel{(A-B) \operatorname{sen} x} + \cancel{(A+B) \cos x}]$$

$$+ 2A x \cancel{e^x} \operatorname{sen} x + 2B \cancel{x e^x} \cos x =$$

$$= -2e^x B \operatorname{sen} x + 2e^x A \cos x$$

LUEGO $A = 0$ Y $B = -1/2$

POR TANTO $y_0(x) = -1/2\, x e^x \cos x$

Y LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O ES

$$\boxed{y(x) = -1/2\, x e^x \cos x + k_1 e^x \cos x + k_2 e^x \operatorname{sen} x}$$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

HOJA 3:

PROBLEMA 4:

$$\begin{cases} x'' + x' - 6x = 0 \\ x(0) = 1 \quad y \quad \lim_{t\to\infty} x(t) = 0 \end{cases}$$

EC. CARACTERÍSTICA $\lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0$

LUEGO $\boxed{x(t) = k_1 e^{2t} + k_2 e^{-3t}}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

ES LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O

SI $1 = x(0) = k_1 + k_2 \Rightarrow k_1 + k_2 = 1$

POR OTRO LADO

$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} k_1 e^{2t} + k_2 e^{-3t} = 0 \Rightarrow k_1 = 0$

LUEGO $k_1 = 0$ y $k_2 = 1$ ASÍ

$\boxed{x(t) = e^{-3t}}$ SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE CONTORNO

PROBLEMA 5:

5) $\begin{cases} y'' - y' - 5y = 1 \\ \lim_{x\to\infty} y(x) = -1/5 \end{cases}$

EC CARACTERÍSTICA ASOCIADA $\lambda^2 - \lambda - 5 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+20}}{2}$

ASÍ $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{21}}{2} > 0$ y $\lambda_2 = \frac{1-\sqrt{21}}{2} < 0$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA ES

$y(x) = k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN PARTICULAR $y_0 \equiv A \Rightarrow -5A = 1 \Rightarrow A = -1/5$

SOLUCIÓN GENERAL $y(x) = -1/5 + k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

AHORA $\lim_{x\to\infty} y(x) = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{5} + k_1 e^{\lambda_1 x} + k_2 e^{\lambda_2 x} = -1/5$

LUEGO CON $e^{\lambda_1 x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ y $\lim_{x\to\infty} e^{\lambda_2 x} = 0$

$\lambda_1 > 0$

SE SIGUE QUE $k_1 = 0$ Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES DEL TIPO $\boxed{y(x) = -1/5 + k_2 e^{\lambda_2 x} \quad k_2 \in \mathbb{R}}$

¡NOS FALTA UN DATO PARA DETERMINAR k_2!

HOJA 3:

PROBLEMA 6: $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \iff (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2) = 0$ donde λ_1 y λ_2 son las raíces de la ecuación característica de la e.d.o lineal de 2º orden

$$x'' + ax' + bx = 0$$

Si $\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$ y $\lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i$ con $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ y $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, incluso nulas, entonces

$$\boxed{x(t) = k_1 e^{(\alpha_1+\beta_1 i)t} + k_2 e^{(\alpha_2+\beta_2 i)t} = k_1 e^{\alpha_1 t}\cdot(\cos\beta_1 t + i\,\mathrm{sen}\,\beta_1 t) + k_2 e^{\alpha_2 t}(\cos\beta_2 t + i\,\mathrm{sen}\,\beta_2 t)}$$

$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, es la solución general de la e.d.o como $|e^{i\beta_i t}| = |\cos\beta_i t + i\,\mathrm{sen}\,\beta_i t| = 1$ $i=1,2$

y como $\lim_{t\to\infty} e^{\alpha_i t} = 0$ ya que $\alpha_i < 0$ $i=1,2$.

entonces $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ para toda solución de la e.d.o.

PROBLEMA 7: Si x_1 y x_2 son soluciones de la e.d.o $ax'' + bx' + cx = g(t)$, entonces $x = x_1 - x_2$ es solución de $ax'' + bx' + cx = 0$

La ecuación característica de esta e.d.o homogénea es $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \Rightarrow \lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Si $b^2 - 4ac < 0 \Rightarrow -b < 0$ es la parte real de λ

Si $b^2 - 4ac \geq 0 \underset{a\cdot c>0}{\Rightarrow} \sqrt{b^2-4ac} < b$ luego $\lambda = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} < 0$

En cualquier caso la parte real de λ solución de la ecuación característica es negativa, luego por el problema anterior

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} x_1(t) - x_2(t) = 0$$

HOJA 3:

PROBLEMA 8:

a) $x'' + a_1 x' + a_2 x = q(t)$, $a_2 \neq 0$.

$$q(x) = \sum_{j=0}^{2} \alpha_j t^j = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2$$ polinomio de grado 2.

Sea $$Q(x) = \sum_{j=0}^{2} \beta_j t^j = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2$$ otro polinomio de grado 2 de coeficientes desconocidos

$$Q'(x) = \beta_1 + 2\beta_2 t$$

$$Q''(x) = 2\beta_2$$

Entrando en la ecuación con Q y forzando a que sea solución.

$$2\beta_2 + a_1(\beta_1 + 2\beta_2 t) + a_2(\beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2) =$$

$$= (a_2\beta_2) t^2 + (2a_1\beta_2 + a_2\beta_1) t + 2\beta_2 + a_2\beta_0 = q(t) =$$

$$= \alpha_2 t^2 + \alpha_1 t + \alpha_0$$ forzamos la solución

Así
$$a_2\beta_2 = \alpha_2$$
$$2a_1\beta_2 + a_2\beta_1 = \alpha_1$$
$$2\beta_2 + a_2\beta_0 = \alpha_0$$

sistema lineal 3×3 con tres incógnitas $\beta_0\ \beta_1\ \beta_2$ que tiene solución única

$$\boxed{\beta_2 = \frac{\alpha_2}{a_2}} \quad (a_2 \neq 0)$$

$$2a_1 \frac{\alpha_2}{a_2} + a_2\beta_1 = \alpha_1.$$

Luego
$$\boxed{\beta_1 = \frac{1}{a_2}\left[\alpha_1 - 2a_1\frac{\alpha_2}{a_2}\right] = \frac{\alpha_1}{a_2} - \frac{2a_1\alpha_2}{a_2^2}}$$

$$2\frac{\alpha_2}{a_2} + a_2\beta_0 = \alpha_0$$

$$\boxed{\beta_0 = \frac{1}{a_2}\left[\alpha_0 - 2\frac{\alpha_2}{a_2}\right] = \frac{\alpha_0}{a_2} - \frac{2\alpha_2}{a_2^2}.}$$

HOJA 3:

PROBLEMA 12: Si $4t^2e^{2t}$, $\operatorname{sen} 2t$ y $-e^{-t}$ son soluciones de la ecuación $x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\dots+a_nx=0$ entonces:

$\lambda=2$ con multiplicidad al menos 3.

$\lambda=2i$ " al menos 1 y su conjugada $-2i$ " "

y $\lambda=-1$ con multiplicidad al menos 1 son raíces de la ecuación característica de la ecuación. Luego esta al menos será

$$(\lambda-2)^3(\lambda+1)(\lambda-2i)(\lambda+2i)=$$

$$=(\lambda-2)^3(\lambda+1)(\lambda^2+4)$$ es un polinomio de grado 6.

$$=(\lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8)(\lambda^3+\lambda^2+4\lambda+4)=$$

$$\begin{aligned}=\lambda^6-6\lambda^5+12\lambda^4-8\lambda^3&+\\ \lambda^5-6\lambda^4+12\lambda^3-8\lambda^2&+\\ 4\lambda^4-24\lambda^3+48\lambda^2-32\lambda&\\ 4\lambda^3-24\lambda^2+48\lambda-32&=\\ =\lambda^6-5\lambda^5+10\lambda^4-16\lambda^3+16\lambda^2+16\lambda-32&=0.\end{aligned}$$

La ecuación buscada es

$$x^{(6)}-5x^{(5)}+10x^{(4)}-16x^{(3)}+16x''+16x'-32x=0.$$

HOJA 3:

PROBLEMA 13: b) $x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0$

EL CAMBIO $x = e^t$

$y(x) = y(e^t)$
$y'(x) = y'(e^t)$
$y''(x) = y''(e^t)$

Y TENEMOS $e^{2t} y''(e^t) - 3e^t y'(e^t) + 4y(e^t) = 0$

SI $z(t) = y(e^t)$
$z'(t) = e^t y'(e^t)$
$z''(t) = e^t y'(e^t) + e^{2t} y''(e^t)$

ASÍ $e^{2t} y''(e^t) + e^t y'(e^t) - 4e^t y'(e^t) + 4y(e^t) =$

$= \underbrace{z''(t) - 4z'(t) + 4z(t)}_{} = 0$

SOLUCIÓN DE $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$

$z(t) = k_1 e^{2t} + k_2 t e^{2t}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

AHORA $e^{2t} = x^2$ Y $t = \ln x$

LUEGO $z(t) = y(e^t) = \boxed{y(x) = k_1 x^2 + k_2 (\ln x) x^2}$ $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$

SOLUCIÓN

COMPROBACIÓN

$y(x) = k_1 x^2 + k_2 (\ln x) x^2$
$y'(x) = 2k_1 x + k_2 x + 2k_2 x \ln x$
$y''(x) = 2k_1 + k_2 + 2k_2 \ln x + 2k_2$

ENTRANDO EN LA EDO

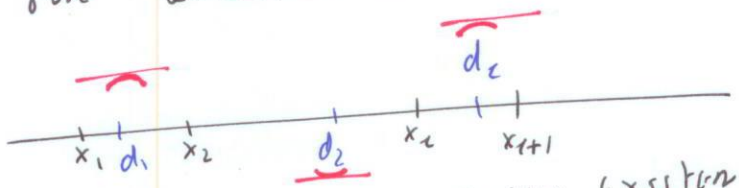
$x^2 (2k_1 + k_2 + 2k_2 + 2k_2 \ln x) - 3x (2k_1 x + k_2 x + 2k_2 x \ln x) +$
$+ 4k_1 x^2 + 4k_2 (\ln x) x^2 =$

$= \cancel{2x^2 k_1} + \cancel{3k_2 x^2} + \cancel{2k_2 x^2 \ln x} - \cancel{6k_1 x^2} - \cancel{3k_2 x^2} - \cancel{6k_2 x^2 \ln x}$
$+ \cancel{4k_1 x^2} + \cancel{4k_2 (\ln x) x^2} = 0.$

HOJA 3:

PROBLEMA 14: Sea $y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \quad + a_n(t)y(t) = 0$

Supongamos que existen $x_1 < x_2 < \quad < x_n$ $\uparrow x_0 \in [a,b]$ pundel de $[a,b]$ y y solución con $y(x_i) = 0$ $\forall i$, por continuidad $y(x_0) = 0$



Por el teorema de Rolle existen $d_1 < d_2 < \quad < d_i$ $\uparrow x_0$ tal que $y'(d_i) = 0$ y por continuidad $y'(x_0) = 0$

Si repetimos el proceso $n-2$ veces vemos que $y''(x_0) = y'''(x_0) = \dots = y^{n-1}(x_0) = 0$.

Y por el teorema de existencia y unicidad concluimos que $y \equiv 0$.

PROBLEMA 15: c) $x^2(\ln x - 1)y'' - xy' + y = 0$

Si $y_1 = x$ es una solución (lo cual el signo $y_1'' = 0$ $y_1' = 1$ $y_1 = x$ $\Rightarrow$ $-x + x = 0$)

Hacemos el cambio de variable $y = xz$.

$y' = z + xz'$

$y'' = 2z' + xz''$

y entonces en la eq

$$x^2(\ln x - 1)(2z' + xz'') - x(\cancel{z} + xz') + \cancel{z}x =$$

$$= x^3(\ln x - 1)z'' + 2(x^2\ln x - x^2)z' - x^2z' =$$

$$= x^3(\ln x - 1)z'' + x^2(2\ln x - 3)z' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad z'' = \frac{3 - 2\ln x}{x(\ln x - 1)} z'$$

$$\int \frac{z''}{z'} = \ln z'$$

$$\int \frac{1}{x}\left(\frac{3 - 2\ln x}{\ln x - 1}\right)dx = \int \frac{3-2u}{u-1}\,du = -2\int \frac{u - 1 - 1/2}{u-1}\,du = -2\ln x + \ln(\ln x - 1) + k$$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x}\,dx$

Así $z' = k\,\frac{\ln x - 1}{x^2}$ $\Rightarrow$ $z(x) = k_1\int \frac{\ln x - 1}{x^2}\,dx + k_2$; y así $y = xk_1\int \frac{\ln s - 1}{s^2}\,ds + xk_2$

HOJA 3:

PROBLEMA 16:

g) $\begin{cases} y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{4x} \\ y(0) = 3,\ y'(0) = 2 \text{ e } y''(0) = 18 \end{cases}$

EC CARACTERÍSTICA $\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = 0$

CLARAMENTE $\lambda = 1$ ES RAÍZ, ASÍ

$\lambda^3 - 2\lambda^2 - \lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda - 2) = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$

LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA ES

$$\boxed{y(x) = k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x}} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

BUSCAMOS AHORA UNA SOLUCIÓN y_0 PARTICULAR

COMO 4 NO ES RAÍZ DE LA EC CARACTERÍSTICA PROBAMOS

$y_0(x) = k e^{4x}$

$y_0'(x) = 4k e^{4x}$

$y_0''(x) = 16k e^{4x}$

$y_0'''(x) = 64k e^{4x}$

ENTRANDO EN LA E.D.O. $64k e^{4x} - 2 \times 16k e^{4x} - 4k e^{4x} + 2k e^{4x} =$

$= k e^{4x}[64 - 32 - 4 + 2] = e^{4x}$

LUEGO $k\,30 = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{30}$

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{30} e^{4x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + k_3 e^{2x}} \quad k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$$

SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O.

AHORA $y(0) = \frac{1}{30} + k_1 + k_2 + k_3 = 3$ (1)

$y'(x) = \frac{4}{30} e^{4x} + k_1 e^{x} - k_2 e^{-x} + 2k_3 e^{2x}$

$y'(0) = \frac{4}{30} + k_1 - k_2 + 2k_3 = 2$ (2)

$y''(x) = \frac{16}{30} e^{4x} + k_1 e^{x} + k_2 e^{-x} + 4k_3 e^{2x}$

$y''(0) = \frac{16}{30} + k_1 + k_2 + 4k_3 = 18$ (3)

(1), (2) Y (3) ES UN SISTEMA LINEAL DE SOLUCIÓN ÚNICA

$k_3 = \frac{435}{90}$ $\quad k_2 = \left(-\frac{33}{30} - \frac{435}{90}\right)\frac{-1}{2}$ $\quad$ Y $\quad k_1 = \frac{89}{30} - \frac{435}{90} + \frac{1}{2}\left(\frac{33}{30} - \frac{435}{90}\right)$.

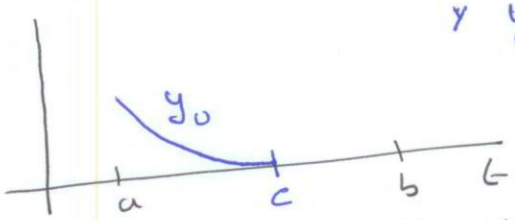
HOJA 3ª

PROBLEMA 17:

a) $y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = 0$

Si y_0 es una solución tangente a la recta $y \equiv 0$, esto es las "k", entonces

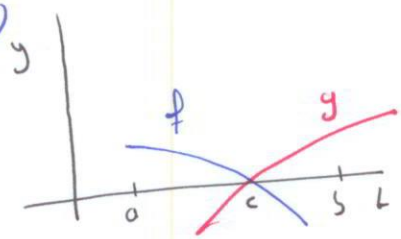
$\exists\, c \in (a, b)$ con $y_0(c) = 0$ y $y_0'(c) = 0$ por ser tangente



Por el teorema de unicidad de soluciones $y_0 \equiv 0$ ya que ésta es la única solución de

$$\begin{cases} y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = 0 \\ y(c) = y'(c) = 0 \end{cases}$$

b)



Sean f y g soluciones de $y''(t) + a_1(t)\, y'(t) + a_2(t)\, y(t) = 0$ con $f(c) = g(c) = 0$

Sean y_1, y_2 soluciones de la ecu con

$y_1(c) = 1$ y $y_1'(c) = 0$

$y_2(c) = 0$ y $y_2'(c) = 1$

que existen, son únicas y forman una base de soluciones. Luego

$f(t) = \lambda_1\, y_1(t) + \lambda_2\, y_2(t)$ $\quad f(c) = \lambda_1 = 0$

$g(t) = \beta_1\, y_1(t) + \beta_2\, y_2(t)$ $\quad g(c) = \beta_1 = 0$

Luego $\boxed{f(t) = \lambda_2\, y_2(t) = \frac{\lambda_2}{\beta_2}\, \beta_2\, y_2(t) = \frac{\lambda_2}{\beta_2}\, g(t)}$

lo que prueba que son una múltiplo de la otra.

HOJA 3:

PROBLEMA 18:

b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

BUSCAMOS FUNCIONES $u(x,t)$ QUE VERIFIQUE ESTA E.D.P. SUGERIMOS QUE:

$$u(x,t) = f(x)\, g(t)$$ SEPARACIÓN DE VARIABLES

ASÍ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)\, g(t)$

$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\, g'(t)$

ENTRANDO EN LA ECUACIÓN

$$f''(x)\, g(t) + f(x)\, g'(t) = 0$$

DIVIDIENDO POR u

$$\frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g'(t)}{g(t)} = 0$$ ASÍ

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = -\frac{g'(t)}{g(t)} = k$$ YA QUE $\frac{f''}{f}$ DEPENDE DE x Y $\frac{g'}{g}$ SOLO DE t.

SI $k>0$ $f''(x) - k f(x) = 0$ EDO LINEAL DE 2º ORDEN

EC CARACT $\lambda^2 - k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{k}$

Y $f(x) = e^{\sqrt{k}t}$ ó $e^{-\sqrt{k}t}$

POR OTRO LADO $\frac{g'(t)}{g(t)} = k \Rightarrow g(t) = e^{-kt}$

EDO LINEAL 1º ORDEN

ASÍ $u(x,t) = e^{\sqrt{k}x} e^{-kt}$ ó $e^{-\sqrt{k}x} e^{-kt}$

SI $k<0$ $f''(x) - k f(x) = 0$ EDO LINEAL DE 2º ORDEN

EC CARACT. $\lambda^2 - k = 0 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{-k}\, i \Rightarrow f(x) = c_1 \cos\sqrt{-k}\,x$ ó $\operatorname{sen}\sqrt{-k}\,x$

Y $g(t) = e^{-kt}$

LUEGO $u(x,t) = c_1 \cos\sqrt{-k}\,x\; e^{-kt}$

ó

$u(x,t) = \operatorname{sen}\sqrt{-k}\,x\; e^{-kt}$.

OBSERVEMOS QUE LA ANTERIOR ES CIERTA $\forall k \in \mathbb{R}$, LUEGO TENEMOS 2 FAMILIAS DE FUNCIONES SOLUCIÓN.