HOJA 4:

PROBLEMA 3:

$$x' = 4x - 2y + 2z$$
$$y' = -x + 3y + z$$
$$z' = x - y + 5z$$

$q = (e^{2t}, e^{2t}, 0)$
$r = (0, e^{4t}, e^{4t})$
$s = (e^{6t}, 0, e^{6t})$

VEAMOS EN PRIMER LUGAR SI q, r y s SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES

SI $0 = \lambda_1 q + \lambda_2 r + \lambda_3 s \iff$

$$\begin{aligned} \lambda_1 e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} &= 0 \\ \lambda_1 e^{2t} + \lambda_2 e^{4t} &= 0 \\ \lambda_2 e^{4t} + \lambda_3 e^{6t} &= 0 \end{aligned}$$

$\forall t \in \mathbb{R}$, EN PARTICULAR PARA $t = 0$

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

ASÍ SI q, r y s SON SOLUCIONES DEL SISTEMA 3×3 DE E.D.O. LINEALES, FORMARÁN UNA BASE DE SOLUCIONES Y POR ELLO, $\phi = (q, r, s)$ FORMARÁ UNA MATRIZ FUNDAMENTAL

q)
$$\begin{aligned} 2e^{2t} &= 4e^{2t} - 2e^{2t} \\ 2e^{2t} &= -e^{2t} + 3e^{2t} \\ 0 &= e^{2t} - e^{2t} \end{aligned}$$
correcto

r)
$$\begin{aligned} 0 &= -2e^{4t} + 2e^{4t} \\ 4e^{4t} &= 3e^{4t} + e^{4t} \\ 4e^{4t} &= -e^{4t} + 5e^{4t} \end{aligned}$$
correcto

s)
$$\begin{aligned} 6e^{6t} &= 4e^{6t} + 2e^{6t} \\ 0 &= -e^{6t} + e^{6t} \\ 6e^{6t} &= e^{6t} + 5e^{6t} \end{aligned}$$
correcto

POR COMPROBACIÓN VEMOS QUE q, r y s SON SOLUCIONES DEL SISTEMA.

HOJA 4

PROBLEMA 4: $x_1 = \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix}$, $x_2 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos t \end{pmatrix}$ soluciones de $x'(t) = A(t)\,x(t)$.

a) Si $A(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{pmatrix}$

tenemos que $x_1' = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1(t) & a_2(t) \\ a_3(t) & a_4(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t \\ e^t \end{pmatrix} \iff$

$$\left.\begin{aligned} a_1 \cos t + a_2(t)\, e^t &= -\operatorname{sen} t \\ a_3(t) \cos t + a_4(t)\, e^t &= e^t \end{aligned}\right\} (*)$$

$x_2' = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} e^{-t} \\ \cos t \end{pmatrix} \iff$

$$\left.\begin{aligned} a_1 e^{-t} + a_2(t) \cos t &= -e^{-t} \\ a_3(t)\, e^{-t} + a_4(t) \cos t &= -\operatorname{sen} t \end{aligned}\right\} (**)$$

(*) y (**) forman un sistema de 4 ecuaciones con cuatro incógnitas (a_1, a_2, a_3, a_4) con matriz de coeficientes

$$\begin{pmatrix} \cos t & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos t & e^t \\ e^{-t} & \cos t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & \cos t \end{pmatrix}$$

de determinante no nulo

Bastará resolver, usando la regla de Cramer:

$$\begin{aligned} a_1 \cos t + a_2 e^t &= -\operatorname{sen} t \\ a_1 e^{-t} + a_2 \cos t &= -e^{-t} \end{aligned}$$

$$a_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} -\operatorname{sen} t & e^t \\ -e^{-t} & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & e^t \\ e^{-t} & \cos t \end{vmatrix}} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen} 2t}{2}}{-\operatorname{sen}^2 t}$$

$$a_2(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{vmatrix}}{-\operatorname{sen}^2 t} = \frac{-e^{-t}[\cos t - \operatorname{sen} t]}{-\operatorname{sen}^2 t}$$

$$\begin{aligned} a_3 \cos t + a_4 e^t &= e^t \\ a_3 e^{-t} + a_4 \cos t &= -\operatorname{sen} t \end{aligned}$$

$$a_3(t) = \frac{\begin{vmatrix} e^t & e^t \\ -\operatorname{sen} t & \cos t \end{vmatrix}}{-\operatorname{sen}^2 t} = \frac{e^t[\cos t + \operatorname{sen} t]}{-\operatorname{sen} 2t}$$

$$a_4(t) = \frac{\begin{vmatrix} \cos t & e^t \\ e^{-t} & -\operatorname{sen} t \end{vmatrix}}{-\operatorname{sen}^2 t} = \frac{-\frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - 1}{-\operatorname{sen}^2 t}$$

b) $\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & e^{-t} \\ e^t & \cos t \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental, si queremos aquella tal que $\tilde{\Phi}(t_0) = I$, solo hay que tomar $\tilde{\Phi}(t) = \Phi(t) \cdot \Phi^{-1}(t_0)$

c) En principio $A(t)$ no está definida para todo t; para $t = 0$ por ejemplo $\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 t}$ no está definida. $t_0 \in \operatorname{Dom} A$.

HOJA 4:

PROBLEMA 5: a) SEA $\psi(t) = \Phi(t)\cdot C$.

DERIVANDO $\boxed{\psi'(t) = \Phi'(t)\, C = A(t)\,\Phi(t)\cdot C = A(t)\,\psi(t)}$

LUEGO ψ ES UNA MATRIZ SOLUCIÓN, COMO

$|\psi(t)| = |\Phi(t)\cdot C| = |\Phi(t)|\cdot|C| \neq 0$ YA QUE

Φ ES UNA MATRIZ FUNDAMENTAL Y SIGUE MEDIANTE $|C| \neq 0$.

LUEGO $\psi(t)$ ES UNA MATRIZ FUNDAMENTAL; ADEMÁS

SI TENEMOS $\psi(t) = C\,\Phi(t)$.

$\psi'(t) = C\,\Phi'(t) = C\,A\cdot\Phi(t)$.

SI A Y C CONMUTAN, ES DECIR SI $CA = AC$

SE TENDRÍA QUE $\boxed{\psi'(t) = CA\,\Phi(t) = AC\,\Phi(t) = A\,\psi(t)}$

LUEGO DE NUEVO $\psi(t)$ SERÍA UNA MATRIZ FUNDAMENTAL.

b) $\psi(t) = C\,\Phi(t)$, ASÍ DERIVANDO $\psi'(t) = C\,\Phi'(t) = CA\,\Phi(t) = B(t)\,C\,\Phi(t)$

ASÍ $B(t)\,C = C\,A \Rightarrow B(t) = C\,A\,C^{-1}$

PROBLEMA 6: SI Φ ES INVERTIBLE

$$\Phi(t)\cdot\Phi^{-1}(t) = I$$

COMO Φ ES DERIVABLE E INVERTIBLE, SIGUE TENIENDO $|\Phi(t)| \neq 0$ $\forall t$, ENTONCES SUPONGAMOS QUE Φ^{-1} TAMBIÉN ES DERIVABLE (*)

$$\frac{d\,\Phi\cdot\Phi^{-1}}{dt} = \Phi'\cdot\Phi^{-1} + \Phi\,(\Phi^{-1})' = \frac{dI}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \Phi\,(\Phi^{-1})' = -\Phi'\,\Phi^{-1}$$

LUEGO COMO $|\Phi(t)| \neq 0$ $(\Phi^{-1})' = -\Phi^{-1}\cdot\Phi'\,\Phi^{-1}$

$$(*)\cdot\ \Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}(t)}{|\Phi(t)|} & \cdots & \frac{A_{n1}(t)}{|\Phi(t)|} \\ \vdots & & \\ \frac{A_{1n}(t)}{|\Phi(t)|} & & \frac{A_{nn}(t)}{|\Phi(t)|} \end{pmatrix}$$

SI $\exists\ \Phi^{-1}(t) \Rightarrow |\Phi(t)| \neq 0$

TODOS LOS ELEMENTOS QUE APARECEN EN Φ^{-1} SON DERIVABLES, SIGUE TENIENDO Φ^{-1} TAMBIÉN LO ES.

HOJA 4:

PROBLEMA 8: SI $B(t) = \int_a^t A(s)\,ds \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $B'(t) = A(t)$.

↓

TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

AHORA SI TOMAMOS $e^{B(t)}$ Y DERIVAMOS

$$\left(e^{B(t)}\right)' \overset{(*)}{=} B'(t)\, e^{B(t)} = A(t)\, e^{B(t)}.$$

¿ REGLA DE LA CADENA ?

(*) HAY QUE PROBAR ESTO DE AQUÍ USANDO LA HIPÓTESIS DE QUE $B(t)A(t) = A(t)B(t)$.

PARA HACER ESTO HAY QUE RECORDAR LA PRUEBA DE QUE $e^{B(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(B(t))^k}{k!}$

Y DE QUE $X_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{(B(t))^k}{k!} = I + \int_0^t A(s)\cdot X_{N-1}(s)\,ds$

↓

USANDO QUE $B'(t) = A(t)$ Y QUE $A(t)B(t) = B(t)A(t)$.

— o —

PROBLEMA 9: $x'(t) = Ax(t) + b(t)$

$x(0) = x_0$ (1)

Φ MATRIZ FUNDAMENTAL DEL SISTEMA HOMOGÉNEO $x'(t) = Ax(t)$, CON $\Phi(0) = I$

POR EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES

$$y_0(t) = \Phi(t) \int_0^t \Phi^{-1}(s)\, b(s)\, ds =$$

USANDO LAS PROPIEDADES DE Φ

$$= \int_0^t \Phi(t)\cdot\Phi(-s)\, b(s)\, ds =$$

$$= \int_0^t \Phi(t-s)\, b(s)\, ds \text{ ; } y_0 \text{ SOLUCIÓN PARTICULAR}$$

ASÍ $x(t) = \Phi(t)x_0 + \int_0^t \Phi(t-s)\, b(s)\, ds$ ES LA SOLUCIÓN ÚNICA BUSCADA.

HOJA 4:

PROBLEMA 10: Sea $x' = Ax$ y la matriz fundamental $\Phi(t) = e^{At} = Q^{-1} e^{Jt} Q$ donde con hipótesis

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Luego $e^{At} = Q^{-1} e^{Jt} Q = Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} Q.$

con $|Q| \neq 0$.

La condición necesaria y suficiente para que $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \lim_{t\to\infty} \sqrt{x_1^2(t) + \dots + x_n^2(t)} = \infty$ es que $\lambda_1 \dots \lambda_n$ sean todos estrictamente positivos.

DEM $\Rightarrow$) Sea $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

La solución $x(t) = e^{At} a = Q^{-1} e^{Jt} Q a$

$$\Rightarrow x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} d_{ij} e^{\lambda_j t} \qquad d_{ij} \in \mathbb{R}$$

Así $(x_i(t))^2 = \left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} e^{\lambda_j t} \right)^2 \geq \left(d_{ij_0} e^{\lambda_{j_0} t} \right)^2 \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, $d_{ij_0} \neq 0$

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $\lambda_{j_0} \leq 0$. Por ejemplo para $\lambda_1 \leq 0$.

Sea $a = Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ y sea $x(t) = e^{At} \cdot a$.

Solución: Así

$$x(t) = Q^{-1} e^{Jt} Q a = Q^{-1} e^{Jt} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Así $x_i(t) = d_i e^{\lambda_1 t} \begin{cases} d_i e^{\lambda_1 t} \xrightarrow[t\to\infty]{\lambda_1 < 0} 0 \\ d_i \xrightarrow[t\to\infty]{\lambda_1 = 0} d_i \end{cases}$

y claramente $|x(t)| \leq 4 \quad \forall t \in (0, \infty)$.

¡Contradicción!

HOJA 4:

PROBLEMA 11: SEA $x' = Ax$ y LA MATRIZ FUNDAMENTAL $\Phi(t) = e^{At} = Q^{-1} e^{Jt} Q$.

DONDE SON MEDIANTE

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \qquad \lambda_i \neq \lambda_j \quad i \neq j$$

LA CONDICIÓN NECESARIA Y SUFICIENTE PARA QUE TODA x SOLUCIÓN ESTÉ ACOTADA ES QUE $\lambda_i = i\beta_i \in \mathbb{C}$ $\forall i = 1 \dots r$ CON PARTE REAL NULA ($\Rightarrow$ r par).

$\Rightarrow$) SEA $x(0) = a$ SOLUCIÓN

$$x(t) = e^{At} a = Q^{-1} e^{Jt} Q a = Q^{-1} \begin{pmatrix} \cos\beta_1 & \operatorname{sen}\beta_1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\beta_1 & \cos\beta_1 & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \Phi \cdot a$$

LUEGO $$x_i = \sum_{j=1}^{r/2} c_{ij} \cos\beta_j t + d_{ij} \operatorname{sen}\beta_j t \qquad i = 1 \dots r$$

OBVIAMENTE TODAS ESTAS FUNCIONES ESTÁN ACOTADAS.

$\Leftarrow$) SUPONGAMOS QUE $\lambda_1 = a + bi$ CON $a \neq 0$
$\lambda_2 = a - bi$ CON $a \neq 0$

LUEGO

$$\text{ASÍ} \quad e^{Jt} = \left(\begin{array}{cc|c} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt & 0 \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt & \\ \hline 0 & & \ddots \; e^{\lambda_r t} \end{array}\right)$$

SEA $a = Q^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ Y SEA LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA QUE VERIFICA QUE $x(0) = a$, ASÍ

$$x(t) = e^{At} a = Q^{-1} e^{Jt} Q Q^{-1} a = Q^{-1} e^{Jt} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= Q^{-1} \begin{pmatrix} e^{a} \cos bt \\ -e^{a} \operatorname{sen} bt \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

LUEGO $$x_i = r_i e^{at} \cos bt - s_i e^{at} \operatorname{sen} bt \qquad i = 1 \dots n$$

$$x_i^2 = \underbrace{e^{2at}}_{\text{NO ACOTADA}} \underbrace{[r_i \cos bt - s_i \operatorname{sen} bt]}_{\text{ACOTADA}}$$

LUEGO $$|x(t)|^2 \geq |x_i|^2 \geq e^{2at} \underbrace{[r_i \cos bt - s_i \operatorname{sen} bt]}_{\text{NO ACOTADA}}$$

HOJA 4ª

PROBLEMA 13:

$$x'(t) = 9x(t) + 6y(t) - 14z(t)$$
$$y'(t) = 5x(t) + 4y(t) - 8z(t)$$
$$z'(t) = 9x(t) + 6y(t) - 14z(t) + cost.$$

LA MATRIZ DE COEFICIENTES:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 6 & -14 \\ 5 & 4 & -8 \\ 9 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$ TIENE POR AUTOVALORES

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 9-\lambda & 6 & -14 \\ 5 & 4-\lambda & -8 \\ 9 & 6 & -14-\lambda \end{vmatrix} = (9-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & -8 \\ 6 & -14-\lambda \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 6 & -14 \\ 6 & -14-\lambda \end{vmatrix}$$

$$+ 9\begin{vmatrix} 6 & -14 \\ 4-\lambda & -8 \end{vmatrix} = (9-\lambda)\left[(14+\lambda)(\lambda-4) + 48\right]$$
$$- 5\left[-84 - 6\lambda + 84\right] +$$
$$+ 9\left[-48 + 56 - 14\lambda\right] =$$

$$= (9-\lambda)\left[\lambda^2 + 10\lambda - 8\right] + 30\lambda + 72 - 126\lambda$$
$$= (9-\lambda)\left[\lambda^2 + 10\lambda - 8\right] - 96\lambda + 72 =$$
$$= -\lambda^3 - 10\lambda^2 + 8\lambda + 9\lambda^2 + 90\lambda - \cancel{72} - 96\lambda + \cancel{72} =$$
$$= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda = -\lambda(\lambda^2 + \lambda - 2)$$

ASÍ $\lambda = 0$ ES UN AUTOVALOR Y CLARAMENTE $\boxed{v_0 = (1, 0, -1)}$ ES UN AUTOVECTOR ASOCIADO

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

ASÍ $\lambda = 1$ ES UN AUTOVALOR CON AUTOVECTOR ASOCIADO

$$\begin{aligned} 8x + 6y - 14z &= 0 \\ 5x + 3y - 8z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 8x + 6y - 14z &= 0 \\ x \quad - z &= 0 \end{aligned}$$

ASÍ $\boxed{v_1 = (1, 1, 1)}$ ES UN AUTOVECTOR ASOCIADO

Y POR ÚLTIMO $\lambda = -2$ ES UN AUTOVALOR CON AUTOVECTOR ASOCIADO

$$\begin{aligned} 11x + 6y - 14z &= 0 \\ 5x + 6y - 8z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} 11x + 6y - 14z &= 0 \\ -6x \quad + 6z &= 0 \end{aligned}$$

ASÍ $\boxed{v_{-2} = (1 \ \tfrac{1}{2} \ 1)}$ ó $\boxed{(2, 1, 2)}$ ES UN AUTOVECTOR ASOCIADO

EL CAMBIO DE COORDENADAS

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

DEVUELVE EL PROBLEMA HOMOGÉNEO A

$$\begin{aligned} \tilde{x}' &= 0 \\ \tilde{y}' &= \tilde{y} \\ \tilde{z}' &= -2\tilde{z} \end{aligned}$$

CON MATRIZ $J = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$ ASÍ

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix}$$

Y TENEMOS QUE

$$e^{At} P = P e^{Jt}.$$

LUEGO UNA MATRIZ FUNDAMENTAL Φ DE NUESTRO PROBLEMA HOMOGÉNEO ES

$$\Phi(t) = e^{At} P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{t} & 2e^{-2t} \\ 0 & e^{t} & e^{-2t} \\ -1 & e^{t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$

OBSERVEMOS QUE $\quad 0 \cdot v_0 = e^{t} v_1 = e^{-2t} v_{-2}$

INVERSA DE $\Phi(t)$ (SE PUEDE USAR CUALQUIER PROCEDIMIENTO)

$$|\Phi(t)| = |P e^{Jt}| = |P|\,|e^{Jt}| = \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) e^{-t} = 2e^{-t}$$

$$\Phi(t)^{-1} = \frac{1}{|\Phi(t)|} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 4e^{-2t} & -e^{-2t} \\ e^{t} & -2e^{t} & e^{t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{e^{-t}}{2} & 2e^{-t} & -\frac{e^{-t}}{2} \\ \frac{e^{2t}}{2} & -e^{2t} & \frac{e^{2t}}{2} \end{pmatrix}$$

ASÍ UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DE LA E.D.O. NO HOMOGÉNEA SERÁ

$$\boxed{y_0(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos t \end{pmatrix} dt} =$$

$$= \Phi(t) \int \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\cos t \\ -\frac{1}{2} e^{-t}\cos t \\ \frac{1}{2} e^{2t}\cos t \end{pmatrix} dt =$$

$$- \int -\frac{1}{2}\cos t \, dt = -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

$$- \int -\frac{1}{2} e^{-t}\cos t \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{1}{2} e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}\int e^{-t}\operatorname{sen} t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t}\cos t + \frac{1}{2}\left[-e^{-t}\operatorname{sen} t + \int e^{-t}\cos t\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{-t}\cos t - \frac{1}{2} e^{-t}\operatorname{sen} t + \frac{1}{2}\int e^{-t}\cos t \, dt$$

DESPEJANDO $-\frac{1}{2}\int e^{-t}\cos t = +\frac{1}{4} e^{-t}\cos t - \frac{1}{4} e^{-t}\operatorname{sen} t$

$$- \int \frac{1}{2} e^{2t}\cos t \, dt \underset{\text{PARTES}}{=} \frac{1}{2} e^{2t}\cos t + \frac{1}{2}\int e^{2t}\operatorname{sen} t \, dt =$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t}\cos t + \frac{1}{2}\left[\frac{e^{2t}}{2}\operatorname{sen} t - \frac{1}{2}\int e^{2t}\cos t \, dt\right]$$

$$= \frac{1}{2} e^{2t}\cos t + \frac{1}{8} e^{2t}\operatorname{sen} t - \frac{1}{8}\int e^{2t}\cos t \, dt$$

DESPEJANDO $5/8 \int e^{2t}\cos t \, dt = \frac{1}{2} e^{2t}\cos t + \frac{1}{8} e^{2t}\operatorname{sen} t$

LUEGO $\frac{1}{2}\int e^{2t}\cos t \, dt = \frac{1}{5} e^{2t}\cos t + \frac{1}{10} e^{2t}\operatorname{sen} t$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^{t} & 2e^{-2t} \\ 0 & e^{t} & e^{-2t} \\ -1 & e^{t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{2} e^{-t}\cos t - \frac{1}{4} e^{-t}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{5} e^{2t}\cos t + \frac{1}{10} e^{2t}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\operatorname{sen} t \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{1}{4}\cos t - \frac{1}{4}\operatorname{sen} t + \frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{13}{20}\cos t - \frac{11}{20}\operatorname{sen} t \\ \frac{9}{20}\cos t - \frac{3}{20}\operatorname{sen} t \\ \frac{13}{20}\cos t + \frac{9}{20}\operatorname{sen} t \end{pmatrix}}$$

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$\boxed{\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}} = \underbrace{e^{At} P \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}}_{\text{SOLUCIÓN GENERAL DE LA HOMOGÉNEA}} + \underbrace{y_v(t)}_{\text{SOLUCIÓN PARTICULAR}}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & e^t & 2e^{-2t} \\ 0 & e^t & e^{-2t} \\ -1 & e^t & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{13}{20}\cos t - \frac{11}{20}\operatorname{sen} t \\ \frac{9}{20}\cos t - \frac{3}{20}\operatorname{sen} t \\ \frac{13}{20}\cos t + \frac{9}{20}\operatorname{sen} t \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} k_1 + k_2 e^t + k_3 2e^{-2t} + \frac{1}{20}\left[13\cos t - 11\operatorname{sen} t\right] \\ k_2 e^t + k_3 e^{-2t} + \frac{1}{20}\left[9\cos t - 3\operatorname{sen} t\right] \\ -k_1 + k_2 e^t + k_3 2e^{-2t} + \frac{1}{20}\left[13\cos t + 9\operatorname{sen} t\right] \end{pmatrix}}$$

HOJA 4:

PROBLEMA 15:

$$\begin{cases} x' = x - 2y & -2 \\ y' = 5x - y & -1 \end{cases}$$

$x(0) = 0$, $y(0) = 0$.

El problema homogéneo asociado es

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$ tiene por autovalores

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 5 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(\lambda+1) + 10 =$$

$$= \lambda^2 - 1 + 10 = \lambda^2 + 9.$$

$$\lambda = \pm 3i$$

Autovectores asociados.

$\lambda = 3i$

$(1-3i)x - 2y = 0$ $\quad v_{3i} = \left(\frac{2}{1-3i}, 1\right)$ ó

$\boxed{(2, 1-3i)}$

Si $\lambda = -3i$ entonces $\boxed{v_{-3i} = (2, 1+3i)}$

y los vectores $\operatorname{Re} v_{3i} = (2, 1)$

$\operatorname{Im} v_{3i} = (0, -3)$.

El cambio $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

Reduce el problema homogéneo a

$\tilde{x}' = 3y$

$\tilde{y}' = -3x$ con matriz $J = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$.

y $e^{Jt} = \begin{pmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \\ -\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{pmatrix}$

UNA MATRIZ FUNDAMENTAL Φ DE NUESTRO PROBLEMA HOMOGÉNEO ES

$$\phi(t) = e^{At}P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos 3t & \operatorname{sen} 3t \\ -\operatorname{sen} 3t & \cos 3t \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 3t & 2\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t & \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}$$

PARA CALCULAR UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

COMO EL TÉRMINO INDEPENDIENTE $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ES CONSTANTE PROBAMOS UNA SOLUCIÓN CONSTANTE.

Y ASÍ $\begin{matrix} 2 = x - 2y \\ 1 = 5x - y \end{matrix} \iff \begin{matrix} 2 = x - 2y \\ -1 = 9y \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = 0 \\ y = -1 \end{matrix}$

$y_0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR.

LA SOLUCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA ES

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^{At}P\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + y_0 =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cos 3t & 2\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t & \operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2k_1\cos 3t + 2k_2\operatorname{sen} 3t \\ (k_1 - 3k_2)\cos 3t + (3k_1 + k_2)\operatorname{sen} 3t - 1 \end{pmatrix}$$

SI PARA $t=0$ $x(0)=0$ e $y(0)=0$ SE TIENE QUE

$2k_1 = 0 \Rightarrow k_1 = 0$ y $k_2 = -1/3$

$(k_1 - 3k_2) - 1 = 0$

Y LA SOLUCIÓN BUSCADA ES

$$\begin{pmatrix} -2/3 \operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t - 1/3 \operatorname{sen} 3t - 1 \end{pmatrix}.$$

HOJA 4:

PROBLEMA 17: Supongamos que $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ con $\alpha > 0$ es un autovalor de la matriz A. Por tanto $\lambda_2 = \alpha - \beta i$ también es autovalor.

Una matriz fundamental del problema $x'(t) = Ax(t)$ es

$$\phi(t) = e^{At} = Q^{-1} e^{Jt} Q \quad \text{donde}$$

$A = Q^{-1} J Q$, J la matriz de Jordan real, semejante con A, y así

$$e^{Jt} = \left(\begin{array}{cc|c} e^{\alpha t}\cos\beta t & e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t & \text{etc} \\ -e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t & e^{\alpha t}\cos\beta t & \\ \hline \multicolumn{2}{c|}{0} & \text{etc} \end{array}\right)$$

Sea $x_0(t)$ la solución de $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = a. \end{cases}$

$x_0(t) = e^{At}a$; Si $x_0(t)$ no está acotada y como $|a - x_0(0)| = 0$ hacemos tender a cero.

Si $x_0(t)$ está acotada, tomamos la solución del problema $\begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = Q^{-1}\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Así $y_0(t) = e^{At} Q^{-1}\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = Q^{-1} e^{Jt}\begin{pmatrix} \delta \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$

$$= Q^{-1}\begin{pmatrix} \delta e^{\alpha t}\cos\beta t \\ -\delta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \delta e^{\alpha t}\cos\beta t\, Q_1^{-1} - \delta e^{\alpha t}\operatorname{sen}\beta t\, Q_2^{-1} =$$

$Q^{-1} = (Q_1^{-1}, Q_2^{-1} \dots Q_n^{-1})$ vectores columna

$$= \delta e^{\alpha t}\left[\cos\beta t\, Q_1^{-1} - \operatorname{sen}\beta t\, Q_2^{-1}\right]$$

y_0 no está acotada y $y_0(0) = \delta Q_1^{-1}$. Si para ESO tomamos $x(t) = x_0(t) + y_0(t)$ con $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2|Q_1^{-1}|}$ tenemos que

$|a - (x_0(0) - y_0(0))| = |y_0(0)| = \delta |Q_1^{-1}| = \varepsilon/2$ y $x_0 + y_0$ no está acotada ya que x_0 es acotada y y_0 no.

HOJA 4:

PROBLEMA 18: Si A es una matriz que deja invariante un subespacio $E \subseteq \mathbb{R}^n$

Entonces si $x(t_0) \in E$ y x solución de $x' = Ax$

$$x'(t_0) = Ax(t_0) \in E.$$

$$y \quad x''(t_0) = Ax'(t_0) \in E$$

$$\dots etc$$

Así $\forall k \in \mathbb{N}$ $x^{k)}(t_0) = A x^{k-1)}(t_0) \in E$

$\therefore$ La solución $x(t)$ de $x' = Ax$ $x(t) = e^{At} x(t_0)$

es una solución analítica en todo $\mathbb{R}$ ya que es una combinación lineal de funciones analíticas en todo $\mathbb{R}$ (las funciones $t^r e^{\alpha t} \cos\beta t$ ó $t^r e^{\alpha t} \operatorname{sen}\beta t$ que aparecen en e^{At} lo son; son analíticas en todo $\mathbb{R}$)

Luego $x(t)$ admite un desarrollo en serie

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k$$

Ahora $\forall N$ $x_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{x^{k)}(t_0)}{k!} (t-t_0)^k \in E$ ya que

$x(t_0)\ x'(t_0) \dots x^{N)}(t_0) \in E$ y estamos ante una combinación lineal

Como $x_N(t) \longrightarrow x(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ y $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial y por tanto un conjunto cerrado de $\mathbb{R}^n$ se sigue que

$$x_N(t) \longrightarrow x(t) \in E \quad \forall t.$$

— o —

HOJA 4:

PROBLEMA 2U:

a) $x'(t+\tau) = A(t+\tau)\,x(t+\tau) = A(t)\,x(t+\tau)$

x SOLUCIÓN — HIPÓTESIS

LUEGO $y(t) = x(t+\tau)$ ES SOLUCIÓN DE $x'(t) = A(t)\,x(t)$

b) SEA $\Phi(t)$ UNA MATRIZ FUNDAMENTAL DE $x'(t) = A(t)\,x(t)$

LUEGO $\Psi(t) = \Phi(t+\tau)$, POR a), ES OTRA MATRIZ FUNDAMENTAL; CLARO

$$\Psi'(t) = \Phi'(t+\tau) = A(t+\tau)\,\Phi(t+\tau) = A(t)\,\Psi(t)$$

HIPÓTESIS

ADEMÁS $|\Psi(t)| = |\Phi(t+\tau)| \neq 0$.

POR OTRO LADO $\Psi(0) = \Phi(\tau)$ MATRIZ DE RANGO MÁXIMO

$$\Psi(t) = \Phi(t+\tau) = \Phi(t)\,\Phi(\tau) \qquad |\Phi(\tau)| \neq 0. \text{ TOMANDO } C = \Phi(\tau)$$

PROPIEDAD DE LAS MATRICES FUNDAMENTALES

c) SE PUEDE PROBAR QUE SI $|C| \neq 0$, ENTONCES $\exists\, L$ CON

$$C = e^{L\tau}.$$

d) SEA $B(t) = \Phi(t)\,e^{-tL}$, DONDE $C = e^{\tau L}$ SIENDO C LA MATRIZ DEL APARTADO b) Y L LA MATRIZ QUE NOS DICE EL APARTADO c).

$B(t)$ ES τ-PERIÓDICA; CLARO

$$B(t+\tau) = \Phi(t+\tau)\cdot e^{-(t+\tau)L} = \Phi(t)\,\Phi(\tau)\cdot e^{-\tau L}e^{-tL}$$

$$= \Phi(t)\,e^{-tL} = B(t)$$

$\Phi(\tau) = C$

$e^{-\tau L} = C^{-1}$

Y CLARO SE TIENE QUE $\Phi(t) = B(t)\,e^{tL}$.

e) SEA $\Phi(t)$ MATRIZ FUNDAMENTAL; POR d) $\Phi(t) = B(t)\,e^{tL}$. CON B τ-PERIÓDICA. EXISTE Q MATRIZ CON $Q^{-1}LQ = L_0$ L_0 MATRIZ DE JORDAN CONGRUENTE CON L. LUEGO

$$\Phi(t) = B(t)\,e^{tQL_0Q^{-1}} = B(t)\,Q\,e^{tL_0}Q^{-1}$$

ASÍ $\Phi_0(t) = \Phi(t)\,Q = B(t)\,Q\,e^{tL_0}$. SI $B_0(t) = B(t)\,Q$ LA CUAL ES τ-PERIÓDICA, SE SIGUE QUE $\Phi_0(t) = B_0(t)\,e^{tL_0}$ CON L_0 UNA MATRIZ DE JORDAN.