ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

## E.D.O. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR. ESTRUCTURA DE LAS SOLUCIONES.

La ecuación lineal de 1º orden

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t),$$

vimos que sus soluciones tenían una estructura lineal. Todas las E.D.O. lienales, incluidos los sistemas de E.D.O. lineales, comparten nombre por la estructura lineal de sus soluciones. En concreto:

**Teorema 1.** *(de **Estructura de las Soluciones**) Sean $p_i : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones de variable real **continuas** para $i = 0, 1, ..., n-1$. Sea la E.D.O. lineal de orden $n$ homogénea*

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + .... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0 \qquad (2)$$

*Se define $S$ como el **conjunto de todas las soluciones** de la E.D.O. Se tiene que:*

- *$S$ es un subespacio vectorial del espacio de las funciones continuas $C[t_1, t_2]$.*
- *La dimensión algebraica de $S$ es $dimS = n$.*

***Demostración:*** (**Ejercicio**) Por el Teorema de Existencia y Unicidad sabemos que $S$ es no vacio. Además si $y \in S$, su dominio es todo $[t_1, t_2]$ e $y$ es derivable, por tanto continua. Así $y \in C[t_1, t_2]$ y $S \subset C[t_1, t_2]$. El espacio de las funciones continuas sobre el intevalo cerrado $[t_1.t_2]$ es un espacio vectorial como sabemos. Ahora tenemos que ver que para todo $y_1, y_2 \in S$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\alpha y_1 + \beta y_2 \in S.$$

Para ver que la $dimS = n$, se considera las soluciones únicas de los problemas de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{c} y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + .... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0 \qquad (*) \\ y(t_0) = 0, ..., y^{j}(t_0) = 1, ..., y^{n-1}(t_0) = 0 \end{array} \right. ,$$

$j = 0, 1, ..., n-1$. Hay que ver que estas $n$ soluciones son independientes y forman una base de $S$ (para ello hay que usar la unicidad de soluciones de la E.D.O.) $\square$

**Teorema 2.** *(de **Estructura de las Soluciones**) Sean $p_i : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ funciones de variable real **continuas** para $i = 0, 1, ..., n-1$ y $f : [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ una función continua conocida. Sea la E.D.O. lineal de orden $n$ **no** homogénea*

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + .... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t) \qquad (1).$$

*Se define $S'$ como el **conjunto de todas las soluciones** de la E.D.O. Se tiene que:*

$$S' = \{\, y_0 + y \ \ : \ y \in S \,\},$$

*donde $y_0$ es una **solución particular** de la E.D.O. no homogénea* (1) *y $S$ es el conjunto de soluciones de la E.D.O. lineal homogénea asociada* (2).

***Demostración:*** (**Ejercicio**) $y_0 \in S'$ es una solución concreta. Lo que hay que ver es que $S'$ es un espacio afín sobre el espacio vectorial $S$. Ver que si $y_1 \in S'$, entonces $y_1 - y_0 \in S$ $\square$

**Observación 1.** *La estructura lineal de la ecuaciones lineales, también de los sistemas de E.D.O. lineales que veremos más adelante, nos lleva al siguiente esquema para encontar todas sus soluciones:*

- *resolver el problema homogéneo asociado, encontrar $S$. **Solución general de la homogénea**.*
- *Encontrar una **solución particular** del problema **no** homogéneo.*
- *La suma de las dos soluciones anteriores nos da la **solución general del problema no homogéneo**.*
- *Por último, si tenemos condiciones inciales, se introducen en la solución general para hallar la **única solución que verifica las condiciones iniciales**.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

*E-mail address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`