ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES DE ORDEN SUPERIOR. FUNCIONES LINEALMENTE INDEPENDIENTES.

La estructura lineal de las soluciones de una E.D.O. lineal hace necesario tener una herramienta para determinar cuando unas funciones son linealmente independientes o no. Esta herramienta es el **Wroskiano**.

Sea

$$C^{n-1}([t_1,t_2]) = \{\ f:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}\ :\ \text{existen } f', f'', ..., f^{n-1)} \text{ continuas } \},$$

el espacio vectorial de la funciones $(n-1)$-veces derivables con continuidad sobre el intervalo $[t_1,t_2]$.

Definición 1. *Dadas $y_1, y_2, ..., y_n \in C^{n-1}([t_1,t_2])$ funciones $(n-1)$-veces derivables sobre el intervalo $[t_1, t_2$, se llama Wroskiano de tales funciones a la función*

$$W(x) = W[y_1, y_2, ...y_n](x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{n-1)}(x) & y_2^{n-1)}(x) & \cdots & y_n^{n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

El Wroskiano sirve para determinar la dependencia lineal de n funciones.

Proposición 1. *Si $y_1, y_2, ...y_n \in C^{n-1}([t_1,t_2])$ son n funciones **linealmente dependientes**, entonces la función Wroskiano es nula*

$$W(x) = W[y_1, y_2, ...y_n](x) = 0 \qquad \textit{para toda} \qquad x\in[t_1,t_2].$$

Demostración: **Ejercicio** $\square$

La relación del Wroskiano con las E.D.O. lineales de orden superior es la siguiente.

Proposición 2. *Sean $p_i:[t_1,t_2]\to\mathbb{R}$ funciones de variable real **continuas** para $i=0,1,...,n-1$. Se considera la E.D.O. lineal de orden n*

$$y^{n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1)}(t) + ... + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = 0.$$

*Si $y_1, y_2, ..., y_n$ son n **soluciones** de la E.D.O., entonces estas funciones son **linealmente independientes** si y solo si*

$$W(x) = W[y_1, y_2, ...y_n](x) \neq 0 \qquad \textit{para toda} \qquad x \in [t_1, t_2].$$

Demostración: **Ejercicio** Hay que usar el Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones $\square$

Cuando tomamos un Wroskiano de funciones que **no** son soluciones de una E.D.O. lineal, este nos puede engañar.

Ejercicio 1. *Encuentra dos funciones linealmente independientes cuyo Wroskiano sea nulo.*

Ejemplos 1. *Veamos algunos ejemplos de funciones linealmente independientes. Más adelante veremos que son soluciones de E.D.O. lineales de orden superior y coeficientes constantes.*

1. $\{1, x, x^2, ..., x^n\}$ *para* $n \in \mathbb{N}$.
2. $\{e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}\}$ *con* $k_i \neq k_j$ *si* $i \neq j$.
3. $$\{e^{k_1 x}, xe^{k_1 x}, ..., x^{n_1} e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, xe^{k_2 x}, ..., x^{n_2} e^{k_2 x}, ... \\ ..., e^{k_r x}, xe^{k_r x}, ..., x^{n_r} e^{k_r x}\}$$
   con $k_i \neq k_j$ *si* $i \neq j$.

Demostración:

1. Tomando el Wroskiano, nos sale un determiante $(n+1) \times (n+1)$
   $$W[1, x, ..., x^n](x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^n \\ 0 & 1 & 2x & & nx^{n-1} \\ & 0 & 2 & & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n! \end{vmatrix} = 1 \times 2 \times 3! \times ... \times n! \neq 0$$
   para todo x. Luego por la Proposición 1 las funciones no pueden ser dependientes.
2. Tomando el Wroskiano:
   $$W[e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, ..., e^{k_n x}](x) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} & \cdots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} & \cdots & k_n e^{k_n x} \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & k_2^{n-1} e^{k_2 x} & \cdots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} =$$
   $$e^{k_1 x} e^{k_2 x} .... e^{k_n x} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_n \\ \vdots & & & \vdots \\ k_1^{n-1} & k_2^{n-1} & \cdots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$
   como este último es el determinante de Vandermonde
   $$e^{k_1 x} e^{k_2 x} .... e^{k_n x} \Pi_{1 \leq i < j \leq n} (k_i - k_j) \neq 0$$

ya que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$.

3. Vamos a probar algo más general. Si $P_1(x), P_2(x), ..., P_n(x)$ son n polinomios en x, entonces

$$P_1(x)e^{k_1x}, P_2(x)e^{k_2x}, ..., P_n(x)e^{k_nx}$$

son independientes si $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Claro, si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ y $\lambda_n \neq 0$ con

$$0 = \lambda_1 P_1(x)e^{k_1x} + \lambda_2 P_2(x)e^{k_2x} + ... + \lambda_n P_n(x)e^{k_nx}$$

entonces

$$P_n(t) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\lambda_n} P_i(x)e^{(k_i-k_n)n},$$

lo cual no es posible. Si derivamos P_n, tantas veces como su grado más uno, éste desaparece; no lo hace en cambio el término de la derecha.

Para terminar, observemos que si existen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ no todas nulas con

$$0 = \lambda_1 e^{kx} + \lambda_2 x e^{kx} + \lambda_3 x^2 e^{kx} + ... + \lambda_n x^{n-1} e^{kx} =$$
$$e^{kx}(\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + ... + \lambda_n x^{n-1}).$$

Lo que implica que

$$\lambda_1 + \lambda_2 x + \lambda_3 x^2 + ... + \lambda_n x^{n-1} = 0,$$

y esto solo es posible si $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.

Observación 1. *En los ejemplos anteriores solo hemos utilizado que $k_i \neq k_j$ si $i \neq j$. Aunque de momento no tenga mucho sentido, los valores de k_i pueden ser números complejos. Más adelante indicaremos que significa e^{Kz} con $K, z \in \mathbb{C}$ y veremos como utilizarlo en nuestro estudio de E.D.O. lineales.*

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`