ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

E.D.O. LINEALES NO HOMOGÉNEAS. VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

Dada la E.D.O. lineal **no** homogénea, con coeficientes continuos,

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t),$$

los Teoremas de Existencia y Estructura nos dicen que la solución general de este problema es de la forma

$$y(t) = y_0(t) + \sum_{i=1}^n K_i y_i(t) \quad \text{para todo} \quad K_i \in \mathbb{R},$$

donde y_0 es una **solución particular** de la E.D.O y $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ son **n soluciones linealmente independientes** de la **E.D.O. homogénea** asociada. Ahora, ¿cómo calculamos una solución particular y_0 ? Tenemos un método general como en el caso de la E.D.O. lineal de primer orden: **Método de Variación de las Constantes**.

Observación 1. ▪ *Formalmente el Método de Variación de las Constantes siempre funciona, aunque los cálculos pueden ser "horribles".*

▪ *En el **caso** de E.D.O lineales de **coeficientes constantes** tenemos otros dos métodos para encontrar soluciones particulares que pueden ser más sencillos que el método de variación de las constantes:*

- *La **Transformada la Laplace**, que es una forma unificada de tratar todos los problemas lineales con coeficientes constantes siempre que el término independiente f sea una función "razonable" (las que aparecen en Ingeniería). La Transformada de Laplace la veremos unos Temas más adelante.*
- *Para funciones f de la forma*

$$f(t) = e^{\lambda t}[P(t) \cos \beta t + Q(t) \sin \beta t]$$

donde P y Q son polinomios y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se pueden "probar" con soluciones particulares y_0 parecidas a f . Esto lo veremos en la lección siguiente y es especialmente útil.

MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

Si conocemos $\{y_i(t)\}_{i=1}^n$ **n** soluciones linealmente independientes de la **E.D.O. homogénea** asociada a la E.D.O.

$$y^n(t) + p_{n-1}(t)y^{n-1}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f(t),$$

podemos probar una solución particular del tipo

$$y_0(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t)y_i(t),$$

donde $\{K_i\}_{i=1}^n$ son funciones por determinar. Derivando

$$y_0'(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t)y_i'(t) + \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i(t), \quad \text{forzamos que} \quad \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i(t) = 0,$$

derivando

$$y_0''(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t)y_i''(t) + \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i'(t), \quad \text{forzamos que} \quad \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i'(t) = 0,$$

$\vdots$

$$y_0^{n-1}(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t)y_i^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-2}(t), \quad \text{forzamos que} \quad \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-2}(t) = 0,$$

y por último, derivando

$$y_0^n(t) = \sum_{i=1}^n K_i(t)y_i^n(t) + \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-1}(t).$$

Ahora, entrando en la E.D.O. con y_0 y su derivadas y forzando a que sea solución, se tiene que

$$\sum_{i=1}^n K_i(t)y_i^n(t) + \sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-1}(t) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(t) \left[\sum_{i=1}^n K_i(t)y_i^j(t) \right] = f(t).$$

Reordenando los términos, tenemos que

$$\sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-1}(t) + \sum_{i=1}^n K_i(t)[y_i^n + p_{n-1}y_i^{n-1} + \dots + p_1y_i' + p_0y_i] = f(t),$$

como cada y_i es una solución de la homogéa, nos queda

$$\sum_{i=1}^n K_i'(t)y_i^{n-1}(t) = f(t).$$

Esta condición junto con las otras condiciones, que hemos forzado con respecto a las funciones $K_i(t)$, nos dan el siguiente **sistema algebraico**

de n ecuaciones y n incógnitas (las funciones K'_i)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n K'_i(t)y_i(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n K'_i(t)y'_i(t) &= 0 \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n K'_i(t)y_i^{n-2}(t) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n K'_i(t)y_i^{n-1}(t) &= f(t) \end{aligned} ,$$

cuyo determinante de los coeficientes es

$$\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y'_1(t) & y'_2(t) & & y'_n(t) \\ \vdots & & & \vdots \\ y_1^{n-1}(t) & y_2^{n-1}(t) & \cdots & y_n^{n-1}(t) \end{vmatrix} = W[y_1, y_2, \dots, y_n](t) \neq 0,$$

el Wroskiano de las soluciones linealmente independientes (y_i) de la homogénea, por tanto no nulo para todo t (ver lección sobre Independencia Lineal). Así, el sistema tiene solución única para cada t , y usando la Regla de Cramer, tenemos que

$$K'_i(t) = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_1^{n-1}(t) & \cdots & f(t) & \cdots & y_n^{n-1}(t) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n](t)} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Si f es una función continua, dado que las $(y_i)_{i=1}^n$ lo son, entonces las funciones K'_i también son continuas y por el Teorema Fundamental del Cálculo existe una primitiva suya

$$K_i(t) = \int \frac{\begin{vmatrix} y_1(t) & \cdots & 0 & \cdots & y_n(t) \\ \vdots & & & & \vdots \\ y_1^{n-1}(t) & \cdots & f(t) & \cdots & y_n^{n-1}(t) \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, \dots, y_n](t)} dt$$

para $i = 1, 2, \dots, n$. Con esto encontramos las $\{K_i\}_{i=0}^n$ buscadas $\square$

Observemos que las funciones $K_i(t)$ no dependen de los coeficientes $p_j(t)$ de la ecuación. Ahora, necesitamos que las p_j sean funciones continuas para asegurar (por El Teorema de Existencia) que podemos encontrar n soluciones y_i linealmente independientes.

Al final del Tema, veremos la conexión entre ecuaciones lineales de orden n y los sistemas de E.D.O lineales de orden uno. Al estudiar sistemas veremos que este Método de Separación de Variables es un caso particular del Método de Separación de Variables para sistemas.

Ejemplo 1. Queremos encontrar la solución general del problema

$$y'' + y = x^3 - x + 1.$$

Demostración: La ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, luego $\lambda = \pm i$ son sus raíces. Por tanto la solución general de la E.D.O. **homogénea** asociada es

$$y(x) = K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x \quad \text{donde} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R}.$$

Tenemos que las dos funciones $\{\cos x, \operatorname{sen} x\}$ forman una base del conjunto de soluciones de la E.D.O. homogénea asociada. Además

$$W[\cos x, \operatorname{sen} x](x) = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Para encontrar una **solución particular** y_0 del problema no homogéneo, usamos el **Método de Variación de las Constantes**. Probamos una solución de la forma:

$$y_0(x) = K_1(x) \cos x + K_2(x) \operatorname{sen} x.$$

Ahora, podemos reproducir el método o usar las fórmulas finales (esto es lo que hacemos aquí).

$$K_1(x) = \int \begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ x^3 - x + 1 & \cos x \end{vmatrix} dx = \int -x^3 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x dx =$$

integrando por partes

$$x^3 \cos x - 7x \cos x + \cos x - 3x^2 \operatorname{sen} x + 7 \operatorname{sen} x.$$

$$K_2(x) = \int \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & x^3 - x + 1 \end{vmatrix} dx = \int x^3 \cos x - x \cos x + \cos x dx =$$

integrando por partes

$$x^3 \operatorname{sen} x - 7x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 7 \cos x.$$

Luego

$$\begin{aligned} \boxed{y_0(x)} &= K_1(x) \cos x + K_2(x) \operatorname{sen} x = \\ & (x^3 \cos x - 7x \cos x + \cos x - 3x^2 \operatorname{sen} x + 7 \operatorname{sen} x) \cos x + \\ & (x^3 \operatorname{sen} x - 7x \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x + 3x^2 \cos x - 7 \cos x) \operatorname{sen} x = \\ & \boxed{x^3 - 7x + 1} . \end{aligned}$$

Comprueba que esta es una solución particular del problema (que no hemos cometido errores en los cálculos).

Ahora la **solución general** del problema es

$$y(x) = x^3 - 7x + 1 + K_1 \cos x + K_2 \operatorname{sen} x \quad \text{donde} \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \quad \square$$

Proposición 1. (*Principio de Superposición*) Sea una E.D.O. lineal de orden n

$$(*) \quad y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = \sum_{j=1}^N a_j f_j(t),$$

donde $a_j \in \mathbb{R}$ y $f_j(t)$ son funciones conocidas para todo $j = 1, 2, \dots, N$. Si para cada $j = 1, 2, \dots, N$, $y_{j,0}$ es una solución particular del problema

$$y^{(n)}(t) + p_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + p_1(t)y'(t) + p_0(t)y(t) = f_j(t),$$

entonces

$$y_0 = \sum_{j=1}^N a_j y_{j,0}(t)$$

es una solución particular del problema (*).

Demostración: Ejercicio $\square$

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es