ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SISTEMAS DE E.D.O. LINEALES DE PRIMER ORDEN.

Consideramos una función:

$$f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x_1, \dots, x_n) \rightarrow f(t, x_1, \dots, x_n) = (f_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, f_n(t, x_1, \dots, x_n))$$

de modo que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, la función **componente** f_i sea **lineal**, es decir

$$f_i(t, x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n a_{i,j}(t)x_j + b_i(t) = \\ a_{i,1}(t)x_1 + a_{i,2}(t)x_2 + \dots + a_{i,n}(t)x_n + b_i(t);$$

donde $a_{i,j}, b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones reales de variable real. En estas condiciones, la función f se puede escribir de forma matricial

$$f(t, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,j}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}(t) & \cdots & a_{i,j}(t) & \cdots & a_{i,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,j}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

De forma reducida

$$f(t, x) = (a_{i,j}(t))x + b(t) = A(t)x + b(t).$$

Definición 1. Denotaremos por:

- $A(t) = (a_{i,j}(t)) \in M_{n \times n}(C[a, b])$ a las matrices cuadradas de orden n cuyas entradas $a_{i,j}$ son funciones continuas

$$a_{i,j} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

para todo $i, j = 1, 2, \dots, n$.

- $b(t) = (b_i(t)) \in M_{n \times 1}(C[a, b])$ a los vectores de orden n cuyas entradas b_i son funciones continuas

$$b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Con esta notación matricial damos las siguientes definiciones.

Definición 2. Dadas funciones $a_{i,j}, b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ para $i, j = 1, 2, \dots, n$.

- Se llama **sistema de E.D.O. lineales de primer orden** al sistema de E.D.O.

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (*)$$

- Una **solución del sistema** (*) es toda trayectoria $x : J \subset [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, sobre un dominio J del intervalo $[a, b]$, que verifica las ecuaciones (*).
- Se llama **sistema de E.D.O lineales homogéneo** asociado al sistema (*):

$$x'(t) = A(t)x(t),$$

(sistema lineal donde $b(t) = 0$).

- Se llama **problema de Cauchy o de valor inicial** del problema lineal (*) al problema:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (**)$$

donde $t_0 \in [a, b]$ fijo y $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Observemos que la notación $x' = A(t)x + b(t)$, siempre que sea claro el orden de la matriz A , es más liviana que escribir:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} a_{1,1}(t) & \cdots & a_{1,j}(t) & \cdots & a_{1,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1}(t) & \cdots & a_{i,j}(t) & \cdots & a_{i,n}(t) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}(t) & \cdots & a_{n,j}(t) & \cdots & a_{n,n}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ b_2(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}.$$

Los sistemas lineales

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \quad (1)$$

los escribimos de la forma

$$x'(t) = Ax(t) + b(t) \quad (2)$$

cuando $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, cuando todas las entradas de $A = (a_{i,j})$ son constantes.

Observación 1. ■ Para los sistemas lineales generales (1) tenemos una teoría que veremos en lo que sigue y en la siguiente lección.

- Para los **sistemas lineales de coeficientes constantes** (2) podemos además encontrar las soluciones explícitamente.

Ejemplo 1. Se considera el sistema

$$\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

¿Son las trayectorias $r(t) = (e^t, e^{-t})$ y $s(t) = (e^{-t}, e^{-t})$ soluciones del sistema?

Vamos a hacer la comprobación.

$$r'(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ -e^{-t} \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^t \end{pmatrix}$$

Luego r no es solución del sistema. Por otro lado

$$s'(t) = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e^{-t} \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$$

si es solución del sistema.

Los sistemas lineales son más sencillos y tienen mejores propiedades que los sistemas generales.

Lema 1. Sean funciones $a_{i,j}, b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continuas** para $i, j = 1, 2, \dots, n$. La función lineal $f(t, x) = A(t)x + b(t)$ es Lipschitziana en la " x ".

Demostración: De la continuidad se sigue que existe $M > 0$ de modo que $|a_{i,j}(t)| \leq M$ para todo $t \in [a, b]$ y todo i, j . Considerando en $\mathbb{R}^n$ la norma infinito:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_i| : i = 1, 2, \dots, n\}$$

para $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, y de forma similar la norma de una matriz $A(t)$; entonces

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty = \|A(t)x - A(t)y\|_\infty = \|A(t)(x - y)\|_\infty \leq$$

de las definiciones de producto de matrices y de norma infinito se tiene la desigualdad

$$n\|A(t)\|_\infty\|x - y\|_\infty \leq nM\|x - y\|_\infty \quad \square$$

Las buenas propiedades de las funciones lineales hace que tengamos un Teorema de Existencia y Unicidad más potente en el caso de sistemas de E.D.O. lineales. Usando el Teorema de Existencia y Unicidad general (ver la lección anterior) y este último Lema, tenemos que:

Teorema 1. (de Existencia y Unicidad) Sean funciones $a_{i,j}, b_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ **continuas** para $i, j = 1, 2, \dots, n$. El problema de Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

donde $t_0 \in [a, b]$ fijo y $x_0 \in \mathbb{R}^n$, tiene una única solución $x(t)$ cuyo dominio es todo el intervalo $[a, b]$.

Por último vamos a escribir los sistemas de E.D.O. lineales en forma integral. Forma que se utiliza para hacer la prueba del Teorema anterior. También nos será útil cuando encontremos las soluciones explícitas de los sistemas homogéneos con coeficientes constantes.

Dado el sistema $\begin{cases} x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (**), integrando (**componente a componente**)

$$\int_{t_0}^t x'(s)ds = \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s)ds \Leftrightarrow x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s)ds$$

lo que nos da la forma integral del sistema

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)x(s) + b(s)ds \quad \square$$

Observemos que si a una trayectoria y la transformamos en otra, que llamamos g , definida por

$$g(t) = x_0 + \int_{t_0}^t A(s)y(s) + b(s)ds.$$

Entonces **resolver el problema de Cauchy** (**) es equivalente a encontrar un **punto fijo** en la transformación anterior. Esta observación se usa en la prueba del Teorema de Existencia y Unicidad.

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO Y MATEMÁTICA APLICADA, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es