ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SISTEMAS NO HOMOGÉNEOS. MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

Dado un sistema de E.D.O. lineal no homogéneo:

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad (*)$$

donde $A(t)$ y $b(t)$ son continuas de orden n; si consideramos $\phi(t)$ una **matriz fundamental** del problema homogéneo asociado

$$x'(t) = A(t)x(t)$$

y $x_p(t)$ una **solución particular** del problema no homogéneo $(*)$, entonces la **solución general** del problema no homogéneo $(*)$ es

$$x(t) = \phi(t)c + x_p(t) \qquad \text{para todo} \qquad c \in \mathbb{R}^n,$$

como nos dice el Teorema 1 de la lección anterior.

La pregunta que nos hacemos ahora es **¿como encontrar x_p conocida ϕ?** La respuesta es:

Teorema 1. ***Método de Variación de las constantes.*** *Sea un sistema de E.D.O. lineal no homogéneo:*

$$x'(t) = A(t)x(t) + b(t) \qquad (*)$$

donde $A(t)$ y $b(t)$ son ***continuas*** *para $t \in [a, b]$ y de orden n. Sea $\phi(t)$ una* ***matriz fundamental*** *del problema homogéneo asociado*

$$x'(t) = A(t)x(t).$$

Entonces una solución particular $x_p(t)$ del sistema $(*)$ viene dada por

$$x_p(t) = \phi(t) \int_{t_0}^{t} \phi^{-1}(s)b(s)ds \qquad \textit{para} \qquad t_0, t \in [a, b].$$

Demostración: **En este caso, la prueba es más importante que el enunciado, ya que nos da el método para llegar a la solución particular.**

Consideramos

$$y(t) = \phi(t)c(t),$$

donde $c(t)$ es una trayectoria sobre $\mathbb{R}^n$ por determinar. Supondremos que $c(t)$ es derivable y que $y(t)$ es una solución del sistema $(*)$. Entonces, usando el Lema 1 de la lección anterior.

$$\begin{array}{rcl} y(t) & = & \phi(t)c(t) \\ y'(t) & = & \phi'(t)c(t)+\phi(t)c'(t). \end{array}$$

Ahora entrando en el sistema $(*)$ con $y(t)$ y forzando a que sea solución:

$$\phi'(t)c(t)+\phi(t)c'(t)=A(t)[\phi(t)c(t)]+b(t).$$

Como ϕ es una matriz fundamental se tiene que $\phi' = A(t)\phi$, luego la igualdad anterior queda

$$\phi(t)c'(t)=b(t).$$

Como ϕ es una matriz fundamental, existe $\phi^{-1}(t)$ (ver la Proposición 1. de la lección anterior) y así podemos despejar c'

$$c'(t)=\phi^{-1}(t)b(t).$$

Ahora $\phi^{-1}(t)$ y $b(t)$ son continuas (b por hipótesis y ϕ^{-1} por el Teorema de la Función Inversa). Integrando componente a componente, se puede definir $c(t)$ por

$$c(t)=\int \phi^{-1}(t)b(t)dt.$$

Para esta c, por su elección, se verifica que:

$$x_p(t)=\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)ds$$

es una solución particular del sistema $(*)$ □

Corolario 1. *Sea el **problema de Cauchy**:*

$$x'(t)=A(t)x(t)+b(t) \qquad (**)$$

$$x(t_0)=x_0$$

donde $A(t)$ *y* $b(t)$ *son **continuas** para* $t\in[a,b]$, $t_0\in[a,b]$ *y* $x_0\in\mathbb{R}^n$. *Sea* $\phi(t)$ *una **matriz fundamental** del problema homogéneo asociado*

$$x'(t)=A(t)x(t).$$

*La **solución general del problema de Cauchy*** $(**)$ *viene dada por:*

$$x(t)=\phi(t)\phi(t_0)^{-1}x_0+\phi(t)\int_{t_0}^{t}\phi^{-1}(s)b(s)ds.$$

Mejor que aprenderse la fórmula anterior es retener el procedimiento para llegar a ella.

Ejemplo 1. *Consideramos el problema no homogéneo:*

$$\begin{array}{rcrrr} x' & = & & -y & +t \\ y' & = & -x & & -3 \end{array}.$$

Para calcular su solución general, primero buscamos una matriz fundamental del problema homogéneo:

$$\begin{array}{rcrr} x' & = & & -y \\ y' & = & -x & \end{array}.$$

Por ejemplo

$$\phi(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix}$$

(Ver Ejemplo 1 de la lección anterior). **En las lecciones siguientes veremos como calcular esta matriz** ϕ. Ahora $|\phi(t)| = -2$ y podemos calcular la inversa:

$$\phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^t/2 & e^t/2 \\ e^{-t}/2 & -e^{-t}/2 \end{pmatrix}.$$

Usando el método de variación de la constantes, intentamos una solución del tipo:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix}$$

y llegamos a que

$$(c_1(t), c_2(t)) = \int \begin{pmatrix} e^t/2 & e^t/2 \\ e^{-t}/2 & -e^{-t}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ -3 \end{pmatrix} dt =$$

$$\left(\int te^t/2 - 3e^t/2 \; dt, \int te^{-t}/2 + 3e^{-t}/2 \; dt \right) =$$

integrando

$$\left((te^t - e^t)/2 - 3e^t/2, (-te^{-t} - e^{-t})/2 - 3e^{-t}/2 \right) =$$

$$\left(te^t/2 - 2e^t, -te^{-t}/2 - 2e^{-t} \right).$$

La solución parcicular buscada es:

$$y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} te^t/2 - 2e^t \\ -te^{-t}/2 - 2e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ t \end{pmatrix}.$$

Ya estamos en condiciones de dar la solución general de este problema no homogéneo:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-t} & e^t \\ e^{-t} & -e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\text{para todo} \quad \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`