ED - EXAMEN
30 - VI - 2020

PROBLEMA 1: UN MÓVIL DE MASA 1, QUE SE ENCUENTRA EN "b", COMIENZA A MOVERSE EMPUJADO POR UN MOTOR QUE PROPORCIONA UNA FUERZA DE EMPUJE CONSTANTE IGUAL A "a". EL MEDIO EN EL QUE SE MUEVE EL MÓVIL SE DILUYE CON EL TIEMPO Y PRESENTA UNA RESISTENCIA PROPORCIONAL A LA VELOCIDAD E INVERSAMENTE PROPORCIONAL AL PASO DEL TIEMPO. LOS FÍSICOS PROPORCIONAN AL USANDO LA 2ª LEY DE NEWTON MODELIZAN EL MOVIMIENTO CON LA E.D.O

$$\left\{\begin{array}{l} x''(t) = a - \dfrac{x'(t)}{t+1} \\ x(0) = b \, , \quad x'(0) = 0 \end{array}\right.$$

DONDE t ES EL TIEMPO Y $x(t)$ LA POSICIÓN DEL MÓVIL EN EL

¿CUÁL ES LA VELOCIDAD DEL MÓVIL EN EL MOMENTO $t = 3$?

SOLUCIÓN LA E.D.O $x''(t) = a - \dfrac{x'(t)}{t+1}$

ES UNA E.D.O LINEAL DE PRIMER ORDEN (SI CONSIDERAMOS $x'(t) = y(t)$ SOLO LA VELOCIDAD) NO HOMOGÉNEA.

RESOLVEMOS LA E.D.O HOMOGÉNEA ASOCIADA.

$$x''(t) = -\frac{x'(t)}{t+1} \quad ; \quad \text{SEPARANDO VARIABLES}$$

$$\frac{x''(t)}{x'(t)} = -\frac{1}{t+1} \quad \text{INTEGRANDO}$$

$$\ln |x'(t)| = -\ln(t+1) + M \, ; \quad M \in \mathbb{R}$$

$$= \ln\left(\frac{e^M}{t+1}\right)$$

LUEGO $x'(t) = \dfrac{M}{t+1}$ $\quad M \in \mathbb{R}$

LA E.D.O NO HOMOGÉNEA ES

$$x''(t) = a - \frac{x'(t)}{t+1}$$

BUSCAMOS UNA SOLUCIÓN PARTICULAR USANDO EL MÉTODO DE VARIACIÓN DE LAS CONSTANTES.

PROBAMOS UNA SOLUCIÓN DEL TIPO

$$y(t) = \frac{M(t)}{t+1}$$

$$y'(t) = \frac{M'(t)}{t+1} - \cancel{\frac{M(t)}{(t+1)^2}} = a - \cancel{\frac{y(t)}{t+1}}$$

FORZAMOS LA IGUALDAD

Y ASÍ LLEGAMOS A $M'(t) = a(t+1)$.

INTEGRANDO $M(t) = \frac{a}{2}(t+1)^2$

Y ASÍ LA SOLUCIÓN PARTICULAR ES

$$y(t) = \frac{a}{2}(t+1)$$

Y LA SOLUCIÓN GENERAL DE LA E.D.O ES

$$\boxed{x'(t) = \frac{a}{2}(t+1) + \frac{M}{t+1}} \qquad M \in \mathbb{R}$$

AHORA COMO $x'(0) = 0$ SE SIGUE QUE

$$0 = \frac{a}{2} + M \quad \text{LUEGO} \quad M = -\frac{a}{2}$$

Y LA VELOCIDAD ES

$$x'(t) = \frac{a}{2}\left(t+1 - \frac{1}{t+1}\right)$$

LO QUE BUSCAMOS ES $x'(3)$

Y ASÍ

$$x'(3) = \frac{a}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right) = K \cdot 8\left(4 - \frac{1}{4}\right) =$$
$$= K(32 - 2) = 30 \cdot K.$$

a ES DE LA FORMA $K \cdot 16$

b NO SE USA PARA HALLAR LA VELOCIDAD.

ED - EXAMEN

30 - VI - 2020

PROBLEMA α: ENCUENTRA UNA SOLUCIÓN PARTICULAR DEL PROBLEMA

$$x'''(t) + a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = t+1+e^{dt}$$

SOLUCIÓN: ECUACIÓN CARACTERÍSTICA

$$\lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$

COMO a, b y c SON DE LA FORMA

$$a = \alpha_1 - 1$$

$$b = \alpha_2 - \alpha_1$$

$$c = -\alpha_2$$

$$\lambda^3 + (\alpha_1 - 1)\lambda^2 + (\alpha_2 - \alpha_1)\lambda - \alpha_2 =$$

$\lambda = 1$ RAÍZ

$$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_2)$$

SI $c = -\alpha = 0$ $\quad (\lambda-1)\lambda(\lambda+\alpha_1)$ RAÍCES $0, 1$ y α_1

SI $c = -\alpha_2 = -1$ $\quad (\lambda-1)(\lambda^2+\alpha_1\lambda+1)$ RAÍCES 1 y COMO $|\alpha_1|<2$ 2 RAÍCES COMPLEJAS.

— SE PUEDE RESOLVER $\begin{cases} x'''+ax''+bx'+cx = t+1+e^{dt} \\ x(0)=0,\ x'(0)=0 \end{cases}$ POR LAPLACE O BIEN:

CASOS:

SI $c = 0$ SE PRUEBA UNA SOLUCIÓN $y_1(t) = t(At+B)$ DE $x'''+ax''+bx'+cx = t+1$

COMO α_1 ES IMPAR y d PAR SE PRUEBA $y_2(t) = Ae^{dt}$ DE $x'''+ax''+bx'+cx = e^{dt}$

$\boxed{y_1 + y_2 \text{ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR}}$

SI $c = -1$, $d = 1$ $\quad \lambda = 0$ NO ES RAÍZ y SE PRUEBA UNA SOLUCIÓN $y_1(t) = At + B$

$\lambda = 1$ ES RAÍZ SIMPLE y SE PRUEBA UNA SOLUCIÓN $y_2(t) = Ate^{t}$

$\boxed{y_1 + y_2 \text{ ES UNA SOLUCIÓN PARTICULAR}}$

EJEMPLO PARA $x'''(t) + \left(-1 - \frac{64}{100}\right) x''(t) + \left(1+\frac{64}{100}\right) x'(t) - x(t) =$

$$= (t+1) + e^t$$

Ec característica

$$0 = \lambda^3 + \left(-1 - \frac{64}{100}\right)\lambda^2 + \left(1+\frac{64}{100}\right)\lambda - 1 =$$

$\lambda = 1$ raíz

$$\lambda^3 - \left(1+\frac{64}{100}\right)\lambda^2 + \left(1+\frac{64}{100}\right)\lambda - 1 \quad \Big| \; \lambda - 1$$

$$\lambda^2 - \frac{64}{100}\lambda + 1$$

$$-\frac{64}{100}\lambda^2 + \left(1+\frac{64}{100}\right)\lambda - 1$$

$$\lambda - 1$$

$$0$$

$$= (\lambda - 1)\left(\lambda^2 - \frac{64}{100}\lambda + 1\right)$$

Como $\left(\frac{64}{100}\right)^2 - 4 < 0$, las raíces de $\lambda^2 - \frac{64}{100}\lambda + 1$ son complejas conjugadas

$\lambda = 0$ no es raíz

Probamos una solución

$y_1(t) = At + B$

$y_1'(t) = A$

$y_2''(t) = 0$

entrando en la EDO $\left(1+\frac{64}{100}\right)A - (At+B) = t+1$

Luego $-A = 1$; $A = -1$

$-\left(1+\frac{64}{100}\right) - B = 1 \Rightarrow B = -\left(1+\frac{64}{100}\right) - 1 = \boxed{a-1}$

$$y_1 = -t + \left[-\left(1+\frac{64}{100}\right) - 1\right]$$

$\lambda = 1$ es raíz

Probamos una solución

$y_2(t) = cte^t$

$y_2'(t) = ce^t + cte^t$

$y_2''(t) = 2ce^t + cte^t$

$y_3'''(t) = 3ce^t + cte^t$

entrando en la EDO

$$ce^t\left[3 + t - \left(1+\frac{64}{100}\right)[2+t] + \left(1+\frac{64}{100}\right)(1+t) - t\right] =$$

$$= ce^t\left[3 - 2\left(1+\frac{64}{100}\right) + \left(1+\frac{64}{100}\right) + \cancel{t} - \left(1+\cancel{\frac{64}{100}}\right)t + \left(1+\cancel{\frac{64}{100}}\right)t - \cancel{t}\right]$$

$$= ce^t\left[3 - \left(1+\frac{64}{100}\right)\right] = e^t \Rightarrow c\left[3 - \left(1+\frac{64}{100}\right)\right] = 1$$

forzamos la ecuación

Luego $c = \frac{1}{3 - \left(1+\frac{64}{100}\right)} = \frac{1}{3+a}$

La solución particular buscada será

$$\boxed{y_1 + y_2 = -t + (a-1) + \frac{1}{3+a}e^t}$$

ED - EXAMEN

30 - VI - 2020.

PROBLEMA 3:] SEA EL SISTEMA $x'(t) = Ax(t) + b$ DONDE $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, MATRIZ REGULAR Y $b \in \mathbb{R}^n$ CONSTANTE. SE SABE QUE A TIENE DOS AUTOVALORES

$$\lambda_1 = \alpha_1 + \beta_1 i$$

$$y \quad \lambda_2 = \alpha_2 + \beta_2 i.$$

ENCUENTRA: a) UNA SOLUCIÓN ACOTADA

b) UNA SOLUCIÓN $x(t)$ REAL TAL QUE
$$\lim_{t\to -\infty} |x(t)| = \infty$$

c) UNA SOLUCIÓN $x(t)$ REAL TAL QUE
$$\lim_{t\to \infty} |x(t)| = \infty$$

EXPLICA POR QUE LAS SOLUCIONES LO SON Y TIENEN TAL COMPORTAMIENTO.

SOLUCIÓN: a) COMO A ES REGULAR, $|A| \neq 0$, EL SISTEMA ALGEBRAICO $Ax = -b$ TIENE SOLUCIÓN ÚNICA

$$x \equiv c = A^{-1}(-b) \in \mathbb{R}^n.$$

ESTA ES UNA SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE E.D.O ESTACIONARIA O CONSTANTE. Y CLARAMENTE ES UNA SOLUCIÓN ACOTADA

b) SI $\alpha_1 < 0$, EXISTE v_1 AUTOVECTOR DEL AUTOVALOR λ_1 Y ASÍ $e^{\lambda_1 t} v_1$ ES UNA SOLUCIÓN COMPLEJA DE $x'(t) = Ax(t)$. AHORA $\bar{\lambda}_1$ Y $\bar{v}_1$ SON OTRO AUTOVALOR Y SU AUTOVECTOR ASOCIADO, TAMBIÉN SOLUCIÓN COMPLEJA DEL SISTEMA HOMOGÉNEO; LUEGO

EL CASO $\alpha_1 > 0$ Y $\alpha_2 < 0$ ES ANÁLOGO.

$$x(t) = c + e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\bar{\lambda}_1 t} \bar{v}_1 \quad \text{ES UNA}$$

SOLUCIÓN DEL SISTEMA, TAL QUE

$x(t) = c + 2\,\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} v_1)$. SOLUCIÓN REAL

SI $e^{\lambda_1 t} = e^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t + i \,\mathrm{sen}\,\beta_1 t)$

Y $v_1 = u_1 + w_1 i$

ENTONCES $\mathrm{Re}(e^{\lambda_1 t} v_1) = e^{\alpha_1 t}\cos\beta_1 t\, u_1 - e^{\alpha_1 t}\,\mathrm{sen}\,\beta_1 t\, w_1$

$$= \boxed{e^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t\, u_1 - \mathrm{sen}\,\beta_1 t\, w_1).}$$

AHORA $|\cos\beta_1 t\, u_1 - \mathrm{sen}\,\beta_1 t\, w_1| \geq \delta > 0$

PARA TODO $t \in \mathbb{R}$ Y ALGÚN $\delta > 0$. CLARO, SI NO FUESE ASÍ, $\exists\, t_0 \in \mathbb{R}$ CON

$$e^{\alpha_1 t_0}(\cos\beta_1 t_0\, u_1 - \mathrm{sen}\,\beta_1 t_0\, w_1) = 0$$

LO CUAL NO ES POSIBLE POR EL TEOREMA DE UNICIDAD (LA SOLUCIÓN $x \equiv 0$ ES LA ÚNICA QUE SE ANULA DE LAS DEL SISTEMA $x'(t) = A\,x(t)$)

LUEGO $\lim_{t\to-\infty} |c + 2e^{\alpha_1 t}(\cos\beta_1 t\, u_1 - \mathrm{sen}\,\beta_1 t\, w_1)| =$

$$= \lim_{t\to-\infty} 2e^{\alpha_1 t}\left|\frac{c}{2e^{\alpha_1 t}} + \cos\beta_1 t\, u_1 - \mathrm{sen}\,\beta_1 t\, w_1\right| \geq$$

$\alpha_1 < 0$

$\frac{c}{2e^{\alpha_1 t}} \xrightarrow[t\to-\infty]{} 0$

$$\lim_{t\to-\infty} 2e^{\alpha_1 t}\, 2\delta = \infty$$

$\alpha_1 t \xrightarrow[t\to-\infty]{} \infty$

c) COMO AHORA $\alpha_2 > 0$ SE TOMA

$x(t) = c + 2\,\mathrm{Re}(e^{\lambda_2 t} v_2)$ DONDE v_2 ES EL AUTOVALOR ASOCIADO A λ_2

SI $v_2 = u_2 + w_2 i$ Y $e^{\lambda_2 t} = e^{\alpha_2 t}(\cos\beta_2 t + i\,\mathrm{sen}\,\beta_2 t)$

$x(t) = c + 2e^{\alpha_2 t}(\cos\beta_2 t\, u_2 - \mathrm{sen}\,\beta_2 t\, w_2)$. ES REAL SOLUCIÓN DEL SISTEMA Y ARGUMENTANDO COMO ANTES

$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| \underset{\alpha_2 > 0}{=} \infty$$

EXAMEN ED

30 - VI - 2020

PROBLEMA 4: ENCUENTRA LA E.D.O CUYA FAMILIA DE CURVAS SOLUCIÓN ES:

$$a x^2 + b y^n = \lambda \qquad \lambda > 0.$$

¿DE QUÉ TIPO ES LA E.D.O HALLADA? INTÉGRALA.

SOLUCIÓN:

SI $n=2$ DERIVANDO RESPECTO DE x

$$2ax + 2b\, y(x)\, y'(x) = 0$$

DESPEJANDO

$$y'(x) = -\frac{a}{b} x \frac{1}{y(x)}$$

E.D.O DE 1er ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS

LA INTEGRAMOS $y y' = -\frac{a}{b} x$

$$\int y y' \, dx = \frac{y^2(x)}{2} \qquad \int -\frac{a}{b} x \, dx = -\frac{a}{b}\frac{x^2}{2} + k$$

ASÍ

IGUALANDO $\frac{y^2(x)}{\cancel{2}} = -\frac{a}{b}\frac{x^2}{\cancel{2}} + k$

$$a x^2 + b y^2 = K \qquad K \in \mathbb{R}$$

SI $n=4$ DE FORMA ANÁLOGA; LA E.D.O RESULTANTE ES TAMBIÉN DE VARIABLES SEPARADAS.

SI $n=-1$ $a x^2 + \frac{b}{y(x)} \Rightarrow$ DERIVANDO RESPECTO DE x

$$2ax - \frac{b\, y'(x)}{y^2(x)} = 0$$

DESPEJANDO

$$y'(x) = 2\frac{a}{b} x\, y^2(x)$$

E.D.O DE 1er ORDEN DE VARIABLES SEPARADAS

INTEGRANDO $\int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = -\frac{1}{y(x)}$ $\int 2\frac{a}{b} x \, dx = \frac{a}{b} x^2 + K$

LUEGO $-\frac{1}{y(x)} = \frac{a}{b} x^2 + k \Rightarrow a x^2 + \frac{b}{y(x)} = k \qquad K \in \mathbb{R}.$