EXAMEN FINAL. AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS.

Enero 2020.

1.- Sea la sucesión de funciones $f_n(x) = 2x\left(1 - \dfrac{x}{2}\right)^n$. Analiza la convergencia puntual y uniforme para $x \in [0, 2]$.

2.- Calcula la transformada de Fourier de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x \in [0,1] \\ 1 + x, & x \in [-1, 0) \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

3.- Resuelve el problema: $\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 5e^{-3t} \\ x(0) = 0 \quad \text{y} \quad x'(0) = 1. \end{cases}$

4.- Usa el Teorema Chino de los restos para resolver:

$$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \quad \text{mod. } 3 \\ 3x &\equiv 2 \quad \text{mod. } 4. \end{aligned}$$

5.-Se consideran los polinomios de $\mathbb{Z}_5[x]$, $P(x) = 2x^3 + 2x^2 + 1$ y $Q(x) = 2x^3 + x^2 + x + 1$. Calcula el $m.c.d(P, Q)$ mónico.

6.- Dado el anillo $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2 + 2)$, se pide:

a) ¿Es cuerpo? Justifica la respuesta.

b) Utiliza el teorema de Lagrange para calcular $[x + 1]^{177}$ en $\mathbb{A}$.

La revisión del examen se efectuará el día 30 de Enero a las 14 horas en el aula 10. No es obligatorio asistir a la revisión.

Observaciones: Para realizar el examen solo se emplearán papel y bolígrafo.

El examen dura 3 horas. Una vez comenzado, no se podrá salir del aula antes de 45 minutos.

1º] Sea $f_n(x) = 2x\left(1-\frac{x}{2}\right)^n$ $\quad x\in[0,2]$, $\quad n\in\mathbb{N}$

Límite puntual: Fijamos $x\in[0,2]$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 2x\left(1-\frac{x}{2}\right)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x=0 \\ 0 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

ya que si $x=0$ $\quad f_n(0) = 2\cdot 0 = 0$ $\forall n$.

si $x\in(0,2] \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} \leq 1$ luego $0 \leq 1-x/2 < 1$

y $\quad r^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \forall r\in[0,1)$.

Límite uniforme:

Veamos cómo son las funciones f_n.

- $f_n(x) \geq 0$ ya que $1-\frac{x}{2} \geq 0$ $\forall x\in[0,2]$
- $f_n(0)=0$ y $f_n(2)=0$.
- $f_n'(x) = 2\left(1-\frac{x}{2}\right)^n + \cancel{2}xn\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left(-1/\cancel{2}\right) =$

$$= 2\left(1-\frac{x}{2}\right)^n - xn\left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[2\left(1-\frac{x}{2}\right) - xn\right] =$$

$$= \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[2-x-xn\right] =$$

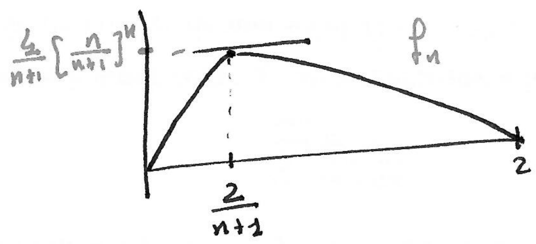
$$= \left(1-\frac{x}{2}\right)^{n-1}\left[2-(n+1)x\right]$$

$f_n'(x)=0 \iff x=2$ ó $x=\frac{2}{n+1}$

f_n tiene un máximo en $x=\frac{2}{n+1}$

y $f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) = \frac{4}{n+1}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]^n = \frac{4}{n+1}\left[\frac{n}{n+1}\right]^n.$

Así



$$|0-f_n(x)| \leq f_n\left(\frac{2}{n+1}\right) =$$

$x=\frac{2}{n+1}$ máximo de f_n en $x\in[0,2]$

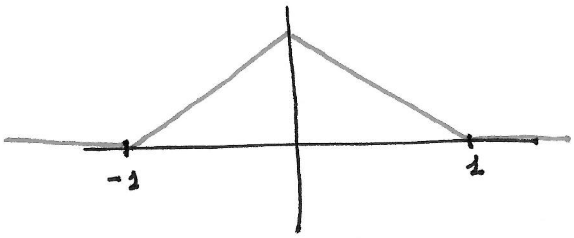
$$= \frac{4}{n+1}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ya que $\frac{4}{n+1} \to 0$ y $\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \to \frac{1}{e}$.

Luego la sucesión converge uniformemente a cero en $[0,2]$.

2.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & x \in [0,1] \\ 1 + x & x \in [-1,0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$



f es par ya que

si $x > 0$ $\quad f(-x) = 1 + (-x) = 1 - x = f(x)$

si $x < 0$ $\quad f(-x) = 1 - (-x) = 1 + x = f(x)$

La transformada de Fourier es real también

$$\boxed{\hat{f}(\lambda)} = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-i\lambda x}\, dx = \int_{-1}^{1} f(x) \left[\cos \lambda x - i \operatorname{sen} \lambda x\right] dx$$

$$\underset{f \text{ par}}{=} \int_{-1}^{1} f(x) \cos \lambda x \, dx \underset{f \text{ par}}{=} 2 \int_0^1 (1-x) \cos \lambda x \, dx$$

$$= 2 \int_0^1 \cos \lambda x \, dx - 2 \int_0^1 x \cos \lambda x \, dx =$$

Ahora $\displaystyle \int_0^1 \cos \lambda x \, dx = \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda}$

$$\int_0^1 x \cos \lambda x \, dx \underset{\text{partes}}{=} x \frac{\operatorname{sen} \lambda x}{\lambda} \Big|_0^1 - \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \operatorname{sen} \lambda x \, dx =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2} \Big|_0^1 = \frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda} + \frac{\cos \lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}$$

$$= 2 \cancel{\frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda}} - 2 \left[\cancel{\frac{\operatorname{sen} \lambda}{\lambda}} + \frac{\cos \lambda}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \right] =$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2 \cos \lambda}{\lambda^2} = \boxed{\frac{2(1 - \cos \lambda)}{\lambda^2}}$$

3º] $\begin{cases} x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 5e^{-3t} \\ x(0) = 0 \quad y \quad x'(0) = 1 \end{cases}$

E.D.O LINEAL DE 2º ORDEN NO HOMOGÉNEA

1º] Solución general de la Ec. homogénea

$$x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$$

Ec característica $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2 = 0$

Luego $\lambda = -3$ solución doble

$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$ solución general.

2º] Solución particular de la EDO.

Como $5e^{-3t}$ es el término independiente y -3 es solución doble de la Ec caracte-rística, probamos una solución particular del tipo

$$y(t) = At^2 e^{-3t}$$

$$y'(t) = 2At e^{-3t} - 3At^2 e^{-3t}$$

$$y''(t) = 2A e^{-3t} - 6At e^{-3t} - 6At^2 + 9At^2 e^{-3t}$$

y entrando en la EDO

$$e^{-3t}[2A - \cancel{12At} + \cancel{9At^2}] + e^{-3t}6[\cancel{2At} - \cancel{3At^2}] + e^{-3t}\cancel{9At^2 e^{-3t}} = 5e^{-3t}$$

Así $2A = 5 \Rightarrow A = 5/2$

3º] Solución general

$$x(t) = 5/2\, t^2 e^{-3t} + C_1 e^{-3t} + C_2 t e^{-3t}$$

4º] Como $x(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$

$$x'(t) = 5t e^{-3t} - \frac{15}{2} t^2 e^{-3t} + C_2 e^{-3t} - 3C_2 t e^{-3t}$$

y $1 = x'(0) = C_2$

Luego la solución del problema de valores iniciales es

$$\boxed{x(t) = 5/2\, t^2 e^{-3t} + t e^{-3t}}$$

3) Usando transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}(x''(t) + 6x'(t) + 9x(t))(s) =$$

$$= \mathcal{L}x''(s) + 6\mathcal{L}x'(s) + 9\mathcal{L}x(s) =$$

$$= s^2\mathcal{L}x(s) - s\,x(0) - x'(0) + 6[s\mathcal{L}x(s) - x(0)] + 9\mathcal{L}x(s) =$$

$$= (s^2 + 6s + 9)\mathcal{L}x(s) - 1$$

Por otro lado

$$\mathcal{L}(5e^{-3t})(s) = 5\mathcal{L}(e^{-3t})(s) = \frac{5}{s+3}$$

Así igualando

$$(s^2+6s+9)\mathcal{L}x(s) - 1 = \frac{5}{s+3}$$

Despejando

$$\mathcal{L}x(s) = \left[1 + \frac{5}{s+3}\right]\frac{1}{s^2+6s+9}$$

Solución en transformadas.

Vamos a calcular $x(s)$.

$$\left(1 + \frac{5}{s+3}\right)\frac{1}{(s^2+6s+9)} = \frac{s+8}{(s+3)^3} =$$

descomponemos en fracciones simples

$$\frac{A}{s+3} + \frac{B}{(s+3)^2} + \frac{C}{(s+3)^3} =$$

Luego $(s+3)^2A + (s+3)B + C = s+8$

$\iff As^2 + 6sA + sB + 9A + 3B + C = s+8$

Luego

$$A = 0 \qquad A = 0$$
$$6A + B = 1 \qquad B = 1$$
$$9A + 3B + C = 8 \qquad C = 5$$

$$= \frac{1}{(s+3)^2} + \frac{5}{(s+3)^3}$$ mirando las tablas

$$\boxed{x(t) = te^{-3t} + \frac{5}{2}t^2e^{-3t}}$$

4:

$2x \equiv 1 \mod 3$

$3x \equiv 2 \mod 4$

COMO $2 \times 2 \equiv 1 \mod 3$

Y $3 \times 3 \equiv 1 \mod 4$

EL SISTEMA SE TRANSFORMA EN

$x \equiv 2 \mod 3$

$x \equiv 6 \equiv 2 \mod 4$

USANDO EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

$$x \equiv 2 \times 4 \times [4]_3^{-1} + 2 \times 3 \times [3]_4^{-1} =$$

$$= 8 \times 1 + 6 \times 3 = 8 + 18 = 26 \mod 12$$

$$\boxed{\text{LUEGO } x \equiv 2 \mod 12}$$

5: PARA CALCULAR $mcd(2x^3 + 2x^2 + 1 ; 2x^3 + x^2 + x + 1)$ EN $\mathbb{Z}_5[x]$ USAMOS EL ARGUMENTO DE EUCLIDES

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + 2x^2 + 1 & 2x^3 + x^2 + x + 1 \\ -2x^3 - x^2 - x - 1 & 1 \\ \hline x^2 + 4x & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 2x^3 + x^2 + x + 1 & x^2 + 4x \\ -2x^3 - 3x^2 & 2x + 3 \\ \hline 3x^2 + x + 1 & \\ -3x^2 - 2x & \\ \hline 4x + 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} x^2 + 4x & 4x + 1 \\ -x^2 - 4x & 4x \\ \hline 0 & \end{array}$$

LUEGO $4x + 1 \in mcd(2x^3 + 2x^2 + 1 ; 2x^3 + x^2 + x + 1)$ MULTIPLICAMOS POR 4

COMO BUSCAMOS EL m.c.d MÓNICO

$$4(4x+1) = \boxed{x + 4}$$ SOLUCIÓN

6] $\mathbb{A} = \mathbb{Z}_5[x]/(x^2+2)$

a] $x^2+2 \in \mathbb{Z}_5[x]$ tiene grado 2 y no tiene raíces en $\mathbb{Z}_5$ ya que

$0+2 = 2 \neq 0$
$1+2 = 3 \neq 0$
$4+2 \equiv 1 \neq 0$
$9+2 \equiv 1 \neq 0$
$16+2 = 3 \neq 0$

Luego x^2+2 es irreducible en $\mathbb{Z}_5[x]$

por lo tanto $\mathbb{A}$ es un cuerpo

b) $[x+1] \in \mathbb{A}$ y $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} - \{0\}$ es grupo multiplicativo de $\mathbb{A}$, tiene $5^2 - 1 = 24$ elementos

Como $[x+1] \in \mathbb{A}^*$, el teorema de Euler nos dice que $[x+1]^{24} \equiv 1$

Luego
$$\begin{array}{r|l} 177 & 24 \\ \hline 09 & 7 \end{array}$$

$$\boxed{[x+1]^{177}} = [x+1]^{7\cdot 24+9} = [x+1]^9 = [x+1]^2[x+1]^2[x+1]^2[x+1]^2[x+1] =$$

$$\downarrow$$
$$([x+1]^{24})^7 \equiv 1$$

Como $(x+1)^2 = x^2+2x+1$ y $x^2+2 \equiv 0$; $x^2 = -2 \equiv 3$ en $\mathbb{A}$

$(x+1)^2 = 3+2x+1 = 2x+4$

$= [2x+4]^2[2x+4]^2[x+1].$

Como $[2x+4]^2 = 4x^2+16x+16 = 4x^2+x+1 \underset{x^2=3}{=} 12+x+1 = x+3$

$= [x+3]^2[x+1]$

$[x+3]^2 = x^2+6x+9 = 3+x+4 = x+2$

$= [x+2][x+1] = x^2+3x+2 = 3+3x+2 = \boxed{3x}$