ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

DETERMINACIÓN EXPLÍCITA DE LA EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ

Dada una matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, matriz cuadrada de orden n y de coeficientes reales, se define su exponencial e^A por:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

Se tiene el siguiente Teorema:

Teorema 1. *: El sistema de E.D.O. $x' = Ax$, donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, tiene por matriz fundamental a*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Además la sucesión de funciones vectoriales $X_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n^2}$

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k t^k}{k!} \to e^{At}$$

converge uniformemente sobre todo intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

La pregunta que nos hacemos es como podemos hacer el cálculo efectivo de estas exponenciales.

Ejemplo 1. *Sea la matriz diagonal* $J = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & \lambda_n \end{pmatrix}.$

En este caso sencillo, como $J^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, *es fácil ver que*

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k t^k}{k!} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ & & & & 0 \\ 0 & & \cdots & & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

La forma sencilla de calcular **potencias de una matriz** es calcular las potencias de su **matriz de Jordan** asociada. Recordemos que dada una matriz cuadrada A, siempre se puede encontrar una matriz J semejante a A, es decir que existe una matriz Q regular con:

$$A = QJQ^{-1},$$

donde esta matriz de Jordan J tiene muchos ceros (ver el **apéndice sobre la matriz de Jordan**).

Es fácil ver por inducción que para todo $k \in \mathbb{N}$

$$A^k = (QJQ^{-1})^k = (QJQ^{-1})^{k-1}(QJQ^{-1}) = (QJ^{k-1}Q^{-1})(QJQ^{-1}) = QJ^kQ^{-1}.$$

Así

$$X_N(t) = \sum_{k=0}^{N} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(QJQ^{-1})^k t^k}{k!} = Q \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k t^k}{k!} Q^{-1} \to Qe^{Jt}Q^{-1}.$$

El último paso que hemos dado, el paso al límite, se sigue del primer paso en la prueba del lema siguiente.

Lema 1. *(Ejercicio por inducción.)* $||A^k||_\infty \leq n^k ||A||_\infty^k$, *para toda matriz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *y todo* $k \in \mathbb{N}$.

Usando el Lema

$$||Qe^{Jt}Q^{-1} - X_N(t)||_\infty = ||Qe^{Jt}Q^{-1} - Q \sum_{k=0}^{N} \frac{J^k t^k}{k!} Q^{-1}||_\infty =$$

$$||Q(e^{Jt}-\sum_{k=0}^{N}\frac{J^k t^k}{k!})Q^{-1}||_\infty \leq n^2||Q||_\infty||Q^{-1}||_\infty||\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{J^k t^k}{k!}||_\infty \to_{N\to\infty} 0.$$

De forma general tenemos el siguiente resultado.

Proposición 1. *Sean A y B dos matrices cuadradas $n \times n$.*

A: *Si A y B cumplen que*

$$AQ = QB,$$

entonces $e^{tA}Q = Qe^{tB}$.

B: *Si además conmutan, es decir si $AB = BA$, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$ se verifica que*

1. $e^{tA}B = Be^{tA}$.
2. $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$.

Demostración: **A)** Dado que $AQ = QB$, es fácil probar por inducción que

$$A^kQ = QB^k \qquad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Por otro lado, usando el lema anterior

$$||e^{tA}Q-X_N(t)Q||_\infty = ||(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!})Q|| \leq n||Q||_\infty||(\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{A^k t^k}{k!})||_\infty \to 0$$

uniformemente.

Así

$$e^{tA}Q = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{t^kA^kQ}{k!} = \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\frac{QB^kt^k}{k!} = Qe^{Bt}$$

B) (**Ejercicio**) 1) Hay que usar **A)** para $AB = BA$ (donde B hace el papel de Q).
2) $e^{(A+B)t}$ es una matriz fundamental del sistama $x' = (A + B)x$. Se comprueba , usando **A)** y **B) 1)**, que $e^{At}e^{Bt}$ también es otra matriz fundamental. Después se concluye usando la unicidad de soluciones
$\square$

Observación 1. *La unicidad de soluciones nos permiten también saber que $e^{A(t+s)} = e^{At}e^{As}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.*

Corolario 1. *Sean A y B matrices cuadradas $n \times n$.*

A: *Si A y B son matrices semejantes, es decir si existe Q matriz regular tal que $A = QBQ^{-1}$, entonces*

$$e^{At} = Qe^{Bt}Q^{-1}.$$

B: *$e^{At}A = Ae^{At}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, considerando derivadas,*

$$(e^{At})' = Ae^{At} = e^{At}A$$

C: *Si $AB = BA$, ambas matrices conmutan, entonces $e^{A+B} = e^A e^B$.*

Demostración: (**Ejercicio**).

Ejemplo 2. ***Ejercicio.*** *Encuentra matrices cuadradas $n \times n$ (las más sencillas serán 2×2) A y B de modo que*

$$e^{A+B} \neq e^A e^B.$$

Aplicación a los sistemas lineales de E.D.O. de primer orden con coeficientes constantes.

El problema de encontrar una **matriz fundamental** del problema $x'(t) = Ax(t)$, donde A es una matriz cuadrada $n \times n$, reside en calcular la matriz exponencial e^{At}. Podemos reducir este problema a encontrar la exponencial de e^{Jt} donde J es una matriz semejante a A cuya exponencial sea más sencilla de calcular. Por ejemplo si J es la **matriz de Jordan** asociada a A. Sabemos que existe un cambio de coordenadas Q, **matriz de paso** $n \times n$ regular, de modo que

$$A = QJQ^{-1}$$

y por tanto

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}, \quad (e^{A0} = I).$$

O también

$$e^{At}Q = Qe^{Jt}, \quad (e^{A0}Q = Q).$$

es otra matriz fundamental del problema $x'(t) = Ax(t)$.

Observación 2. *Otra forma de ver esto mismo es la siguiente. En el problema $x'(t) = Ax(t)$, consideramos el cambio de variable*

$$x(t) = Qy(t)$$

donde Q es la matriz de paso que asocia A con su matriz de Jordan J, es decir $A = QJQ^{-1}$. Asi

$$x'(t) = Qy'(t),$$

despejando y'

$$y'(t) = Q^{-1}x'(t) = Q^{-1}Ax(t) = Q^{-1}AQy(t) = Jy(t).$$

Transformamos el problema original en el problema $y' = Jy$ cuya solucion es $y(t) = e^{Jt}c$ con $c \in \mathbb{R}^n$. Ahora deshaciendo el cambio de variable,

$$x(t) = Qe^{Jt}c \qquad \text{para todo} \qquad c \in \mathbb{R}^n.$$

Vamos a ver ahora un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3. $x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 6 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t)$, *donde* $x(0) = (1,0,0)$.

Cálculo de autovalores. Para calcular los autovalores de la matriz A resolvemos la ecuación característica:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -5 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 6 & 6-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)((1-\lambda)(6-\lambda)+6) =$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7\lambda + 12) = (2-\lambda)(\lambda-4)(\lambda-3).$$

Matriz de Jordan. Dado que tenemos tres autovalores reales y distintos la matriz A es diagonalizable y tiene por matriz de Jordan semejante a

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exponencial de la matriz de Jordan. En el **Ejemplo 1.** vimos que la exponencial de J es

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Matriz fundamental del problema. Sabemos por la Observación anterior que una matriz fundamental del problema es:

$$\phi(t) = e^{At}Q = Qe^{Jt}$$

donde Q es la matriz de paso, en este caso la matriz de los autovectores de A en columna.

Cálculo de la matriz de paso. .- Para $\lambda = 2$

$$(A-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -x & -5y & -3z & = & 0 \\ 2x & +6y & +4z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema y vemos que el vector $V_2 = (-1,-1,2)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 2$.

.- Para $\lambda = 4$

$$(A-4I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -3x & -5y & -3z & = & 0 \\ & -2y & & = & 0 \\ 2x & +6y & +2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema y vemos que el vector $V_4 = (1,0,-1)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 4$.

.- Para $\lambda = 3$

$$(A-3I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} -2x & -5y & -3z & = & 0 \\ & -y & & = & 0 \\ 2x & +6y & +3z & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvemos el sistema y vemos que el vector $V_3 = (-3, 0, 2)$ es un autovector asociado al autovalor $\lambda = 3$.
Por tanto la matriz de paso es:

$$Q = (V_2, V_4, V_3) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución general del Problema. Como nos dice la Observación anterior, la solución general del problema es

$$x(t) = e^{At}Qc = Qe^{Jt}c = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{4t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{pmatrix} c =$$

$$\begin{pmatrix} -e^{2t} & e^{4t} & 3e^{3t} \\ -e^{2t} & 0 & 0 \\ 2e^{2t} & -e^{4t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad (c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Solución particular. Si queremos calcular la solución particular que verifica $x(0) = (1, 0, 0)$, tenemos que encontrar $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$\begin{pmatrix} -e^{0} & e^{0} & 3e^{0} \\ -e^{0} & 0 & 0 \\ 2e^{0} & -e^{0} & -2e^{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos este sistema y obtenemos la solución $(c_1, c_2, c_3) = (0, -2, 1)$.
Luego la solución buscada es

$$x(t) = \begin{pmatrix} -e^{2t} & e^{4t} & 3e^{3t} \\ -e^{2t} & 0 & 0 \\ 2e^{2t} & -e^{4t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{4t} + 3e^{3t} \\ 0 \\ 2e^{4t} - 2e^{3t} \end{pmatrix}$$

Exponencial de la matriz A. Si queremos encontrar la exponencial de A, como

$$e^{At} = Qe^{Jt}Q^{-1}$$

tenemos que hallar la inversa de la matriz de paso Q,

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y así

$$e^{At} = \begin{pmatrix} -e^{2t} & e^{4t} & 3e^{3t} \\ -e^{2t} & 0 & 0 \\ 2e^{2t} & -e^{4t} & -2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{4t}+3e^{3t} & e^{2t}-4e^{4t}+3e^{3t} & -3e^{4t}+3e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^{4t}-2e^{3t} & -2e^{2t}+4e^{4t}-2e^{3t} & 3e^{4t}-2e^{3t} \end{pmatrix}.$$

Comprobación. Como $e^{A0} = I$, se sigue que la solución particular del problema, $x(0) = (1, 0, 0)$, debe ser

$$x(t) = e^{At} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{4t}+3e^{3t} & e^{2t}-4e^{4t}+3e^{3t} & -3e^{4t}+3e^{3t} \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 2e^{4t}-2e^{3t} & -2e^{2t}+4e^{4t}-2e^{3t} & 3e^{4t}-2e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2e^{4t}+3e^{3t} \\ 0 \\ 2e^{4t}-2e^{3t} \end{pmatrix},$$

lo mismo que ya teníamos.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es