ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EXPONENCIAL DE UNA MATRIZ NO DIAGONALIZABLE.

El Álgebra Lineal nos dice que toda matriz $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ admite una matriz semejante de Jordan J de la forma:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{J_1} & & & \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r} \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix};$$

para cada $j = 1, 2, ...r$ y donde λ_j es un autovalor de la matriz A (real o complejo; incluso pueden repetirse). Cada matriz J_j es una matriz cuadrada de orden n_j y claro se verifica que $n = \sum_{j=1}^{r} n_j$.

Aplicando la definición de exponencial de una matriz a J tendremos que:

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} \boxed{e^{J_1 t}} & & & \\ & \boxed{e^{J_2 t}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{e^{J_r t}} \end{pmatrix}$$

ya que

$$J^k = \begin{pmatrix} \boxed{J_1^k} & & & \\ & \boxed{J_2^k} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{J_r^k} \end{pmatrix}$$

para todo $k = 0, 1, 2, ...$

De lo anterior se sigue que hemos reducido el problema de encontrar e^{Jt} al problema de encontrar la exponencial de matrices del tipo J_j. Distinguiremos dos casos. Para autovalores reales y el segundo caso para cuando los autovalores sean complejos.

CASO REAL.

Para $\lambda \in \mathbb{R}$ una matriz del tipo $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$, tenemos que

$$J = \lambda I + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \lambda I + D$$

donde I es la matriz identidad. Como la matriz identidad I conmuta con cualquier matriz, en particular con D, las propiedades de la matriz exponencial nos dicen que:

$$e^{Jt} = e^{(\lambda I + D)t} = e^{\lambda I t} e^{Dt}.$$

La primera exponencial ($e^{\lambda I t}$) sabemos calcularla. Veamos como se calcula la segunda.

Lema 1. *Dada una matriz del tipo* $D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n\times n}$, *entonces* $D^0 = I, \quad D,$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \cdots, D^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & \ddots & & 0 \\ & & & \vdots \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad D^n = 0$$

Demostración: La prueba se hace por inducción sobre el exponente k. Para $k = 2$, multiplicando

$$D^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Supuesto cierto el resultado para D^{k-1}, entonces multiplicando

$$D^k = D^{k-1} D = \begin{array}{c} \begin{matrix} \mathbf{1} & \quad & \mathbf{k} & \mathbf{k+1} & \quad & \mathbf{n} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & & 0 & \ddots & \\ & & & & & 1 \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array},$$

donde la **negrita** indica la columna.

También se puede probar, viendo que la matriz D tiene el efecto, multiplicando por la derecha $(B \times D)$, de correr las columnas de B a la derecha, anulando la primera y haciendo desaparecer la última columna $\square$

Lema 2. *Sea D la matriz del Lema anterior de orden n, entonces:*

$$e^{Dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{D^k t^k}{k!} =$$

$$\begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ \vdots & & & & & & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & & & t \\ 0 & & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Lema 3. *Sea* $J_j = \begin{pmatrix} \lambda_j & 1 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ 0 & & & & \lambda_j \end{pmatrix} \in M_{n\times n}(\mathbb{R}),$ *entonces*

$$e^{J_j t} = e^{\lambda_j I t + Dt} = e^{\lambda_j I t} e^{Dt} =$$

$$e^{\lambda_j t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots & & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \ddots & & \vdots \\ & & 1 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{3!} \\ \vdots & & & & & & \frac{t^2}{2!} \\ & & & & & & t \\ 0 & & \cdots & & & & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_j t} & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_j t} & \cdots & & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{\lambda_j t} \\ & e^{\lambda_j t} & te^{\lambda_j t} & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_j t} & \ddots & & \vdots \\ & & e^{\lambda_j t} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \frac{t^3}{3!}e^{\lambda_j t} \\ \vdots & & & & & & \frac{t^2}{2!}e^{\lambda_j t} \\ & & & & & & te^{\lambda_j t} \\ 0 & & \cdots & & & & e^{\lambda_j t} \end{pmatrix}$$

CASO COMPLEJO.

Dada $\lambda \in \mathbb{C}$, si una **caja** del tipo $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$ aparece en la matriz de Jordan de una matriz A, entonces el Álgebra Lineal nos dice que el autovalor $\overline{\lambda}$, conjugado del anterior, también aparece y lleva asociada un caja $\overline{J}$ de igual orden que J con $\overline{J} = \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 \\ & & & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$.

Es más, si $\lambda = a + bi \in \mathbb{C}$, se puede encontrar una matriz semejante a la matriz A, de modo que las cajas J y $\overline{J}$ se funden en una única caja G de la forma

$$G = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \cdots & & & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & & & & & & & & \\ & & a & b & 1 & 0 & & & & & & \\ & & -b & a & 0 & 1 & & & & & & \\ & & & & & \ddots & & \ddots & & & \vdots & \\ \vdots & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & a & b & 1 & 0 \\ & & & & & & & & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & & & & & & & & & & a & b \\ 0 & & & & & & & & & & -b & a \end{pmatrix},$$

forma real de la matriz de Jordan (ver Apéndice sobre la Matriz de Jordan).

Ahora el problema se reduce a calcular e^{Gt}. Procedemos de forma análoga al caso real. En primer lugar descomponemos la matriz G como una suma

$$G = G_1 + G_2$$

donde

$$G_1 = \begin{pmatrix} \begin{array}{cc|} a & b \\ -b & a \\ \hline \end{array} & & & \\ & \begin{array}{cc|} a & b \\ -b & a \\ \hline \end{array} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \begin{array}{cc|} a & b \\ -b & a \\ \hline \end{array} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{B} & & & \\ & \boxed{B} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{B} \end{pmatrix}$$

y

$$G_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & \ddots & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 1. *Prueba que la matrices G_1 y G_2 conmutan, es decir que*

$$G_1 G_2 = G_2 G_1.$$

Indicación: *Procese por inducción con respecto al orden de la Matriz G. ¿Por qué este orden es par?*

Dado que las matrices conmutan, entonces

$$e^{Gt} = e^{(G_1+G_2)t} = e^{G_1 t} e^{G_2 t}.$$

La primera exponencial ya sabemos calcularla, usando la definición y lo que conocemos del caso de matrices diagonalizables (lección anterior).

$$e^{G_1 t} = \begin{pmatrix} e^{Bt} & & & \\ & e^{Bt} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{Bt} \end{pmatrix}$$

donde $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ y donde

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}.$$

Ahora nos queda calcular $e^{G_2 t}$. En este caso también procedemos de forma análoga al caso real.

Lema 4. *Dada una matriz del tipo $G_2 \in M_{2m\times 2m}$, entonces $G_2^0 = I$, G_2,*

$$G_2^k = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \mathit{1} & \mathit{2} & \mathit{3} & \mathit{4} & & \mathit{2k{+}1} & \mathit{2(k{+}1)} & & \mathit{2m\text{-}1} & \mathit{2m} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & & & & & \ddots & \vdots & \\ & & & & & & & & 1 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & & & \vdots & \\ 0 & 0 & & & & \cdots & & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & & & & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

y $G_2^m = 0$. *(Donde la* ***negrita*** *indica la columna).*

Demostración: Ejercicio por induccion sobre k $\square$

Lema 5. *Sea* G_2 *la matriz del Lema anterior de orden* $2m$*, entonces:*

$$e^{G_2 t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{G_2^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{G_2^k t^k}{k!} = I + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{G_2^k t^k}{k!} = I +$$

$$\begin{pmatrix}
0 & 0 & t & 0 & \frac{t^2}{2!} & 0 & \frac{t^3}{3!} & 0 & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} & 0 \\
0 & 0 & 0 & t & 0 & \frac{t^2}{2!} & 0 & \frac{t^3}{3!} & & 0 & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\
 & & 0 & 0 & t & 0 & \frac{t^2}{2!} & 0 & \ddots & \vdots & \\
 & & 0 & 0 & 0 & t & 0 & \frac{t^2}{2!} & & & \\
 & & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & 0 & 0 & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & \ddots \quad \ddots & \frac{t^3}{3!} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & \frac{t^3}{3!} \\
\vdots & & & & & & & & & \frac{t^2}{2!} & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & \frac{t^2}{2!} \\
 & & & & & & & & & t & 0 \\
 & & & & & & & & & 0 & t \\
0 & 0 & & & \cdots & & & & & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & 0 & 0
\end{pmatrix}$$

Lema 6. *Sea la matriz*

$$G = \begin{pmatrix}
a & b & 1 & 0 & & & \cdots & & 0 & 0 \\
-b & a & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & a & b & 1 & 0 & & & & \\
 & & -b & a & 0 & 1 & & & & \\
 & & & & \ddots & & \ddots & & \vdots & \\
\vdots & & & & & & & & & \\
 & & & & & & a & b & 1 & 0 \\
 & & & & & & -b & a & 0 & 1 \\
0 & & & & & & & & a & b \\
0 & & & & & & & & -b & a
\end{pmatrix} = G_1 + G_2 \in M_{2m \times 2m},$$

entonces

$$e^{Gt} = e^{G_1 t} e^{G_2 t} =$$

$$\begin{pmatrix}
e^{Bt} & & & \\
 & e^{Bt} & & \\
 & & \ddots & \\
 & & & e^{Bt}
\end{pmatrix} \left(I + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{G_2^k t^k}{k!}\right) =$$

$$\begin{pmatrix} e^{Bt} & e^{Bt}t & \frac{e^{Bt}t^2}{2} & \cdots & \frac{e^{Bt}t^{m-1}}{(m-1)!} \\ & e^{Bt} & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & & \frac{e^{Bt}t^2}{2} \\ & & & & e^{Bt}t \\ 0 & & \cdots & & e^{Bt} \end{pmatrix}$$

donde como antes

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\operatorname{sen} bt \\ -e^{at}\operatorname{sen} bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix}.$$

Observación 1. *Dada un matriz cuadrada A de orden n, su* ***matriz de Jordan real*** *J tiene una matriz exponencial*

$$e^{Jt} = \begin{pmatrix} e^{J_1 t} & & & \\ & e^{J_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{J_r t} \end{pmatrix}$$

formada por cajas de matrices cuadradas ($e^{J_j t}$) de los tipos de las que aparecen en los lemas 2 (para autovalores reales) y 6 (para autovalores complejos).

De forma general podemos dar el siguiente resultado:

Teorema 1. *Sea $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ una solución del sistema $x'(t) = Ax(t)$, donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Entonces cada coordenada de la solución*

$$x(t) = (\, x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)\,)$$

es una combinación lineal de de funciones del tipo:

$$t^k e^{at}\cos bt, \quad t^r e^{at}\operatorname{sen} bt$$

donde $\lambda = a + bi$ recorre los autovalores de la matriz A, con $b \geq 0$ autovalores reales o complejos, y donde k y r son enteros comprendidos entre 0 y a lo más la multiplicidad de λ como autovalor ($m(\lambda)$), es decir

$$0 \leq k, r \leq m(\lambda) - 1$$

para cada autovalor λ.

Demostración: Claro, si Q es la matriz de paso para pasar de A a su martiz de Jordan real J (ver el Apéndice sobre a la Matriz de Jordan), entonces sabemos que $e^{At}Q = Qe^{Jt}$ es una matriz fundamental del sistema y por tanto

$$x(t) = Qe^{Jt}c \qquad \text{para algún} \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Como Q y c son constantes y según la Observación anterior todas las entradas de la matriz e^{Jt} son de la forma (salvo constantes)

$$t^k e^{at}\cos bt, \quad t^r e^{at}\operatorname{sen} bt,$$

el producto correspondiente da combinaciones lineales de las mismas
□

Encontrar la exponencial de una matriz para ordenes grandes parece una tarea complicada dado que hay que encontrar los autovalores de la matriz (resolver la ecuación característica). El Teorema anterior aunque no precisa como son las soluciones de un sistema si nos ayuda a comprender las propiedades de las mismas.

Corolario 1. *Se considera el sistema lineal $x'(t) = Ax(t)$, donde $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$.*

1. *Si todos los autovalores de la matriz A tienen parte real negativa, entonces toda solución del sistema verifica que*
$$\lim_{t\to\infty} |x(t)| = 0.$$
2. *Si todos los autovalores de la matriz A son distintos y tienen parte real nula, entonces toda solución del sistema es una función acotada.*

Demostración: **Ejercicio.** Usa el Teorema anterior □

Ejemplo 1. *Hay que resolver el problema de valor inicial:*

$$\begin{array}{rcrrrrr}
x_1' &=& x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 \\
x_2' &=& & x_2 & +x_3 & -x_4 & \\
x_3' &=& x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 \\
x_4' &=& x_1 & +x_2 & & -2x_4 & -x_5 \\
x_5' &=& -x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 &
\end{array}$$

con $x(0) = (1, 0, 0, 0, 1)$.

También lo podemos escribir como:

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} x(t) = Ax(t)$$

Cálculo de autovalores. Resolvemos la ecuación característica:

$$0 = |A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

sumando a la tercera y cuarta fila la quinta

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & 0 & -1 & -\lambda & -1-\lambda \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera columna

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & -1-\lambda \\ -1 & -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 & 2 \\ 1-\lambda & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ 0 & -1 & -\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

desarrollando ambos determinantes por la primera columna y teniendo en cuenta que $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(1-\lambda)^2\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda & -1-\lambda \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} + (1-\lambda)\begin{vmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -\lambda & 1 & 1-\lambda \\ -1 & -\lambda & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(1-\lambda)^2[-\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1] + (1-\lambda)[2+2\lambda^2] = ...$$

$$..... = (1-\lambda)(\lambda^2+1)^2.$$

Por tanto los autovalores son:

$$\begin{array}{rcll} \lambda & = & 1 & \\ \lambda & = & i & \text{multiplicidad } 2 \\ \lambda & = & -i & \text{multiplicidad } 2 \end{array}$$

Matriz de Jordan real. Con los datos que tenemos la matriz de Jordan real asociada a A puede ser

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & -1 & 0 & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{o bien} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para determinar cuál de las dos matrices es la asociada a la matriz A, tenemos que determinar cuantos autovectores linealmente independientes se corresponden con el autovalor complejo i. Para ello tenemos que calcular

$$dimKer(A-iI) = 5 - Rango(A-iI),$$

donde la igualdad viene dada por el Teorema de la Dimensión.

Rango de $A - iI$. La matriz

$$A - iI = \begin{pmatrix} 1-i & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1-i & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -2-i & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -i \end{pmatrix}$$

sumando a la tercera y cuarta fila la quinta, nos da la matriz equivalente

$$\begin{pmatrix} 1-i & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1-i & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 1 & 1-i \\ 0 & 0 & -1 & -i & -1-i \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -i \end{pmatrix}.$$

Como la cuarta fila es la tercera multiplicada por $-i$ y el determinante que resulta de quitar la cuarta fila y la quinta columna

$$\begin{vmatrix} 1-i & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 1-i & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

se sigue que el rango de la matriz $A - iI$ es cuatro. Por tanto solo existe un autovector independiente asociado al autovalor i; otro autovector asociado al autovalor $-i$ y por tanto la matriz de Jordan que buscamos es:

$$J = \begin{pmatrix} \boxed{1} & & & & \\ & 0 & 1 & 1 & 0 \\ & -1 & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Cálculo de la matriz de Paso. Para calcular la matriz de paso Q que nos permite pasar de A a la matriz semejante de Jordan real J ($A = QJQ^{-1}$) procedemos de la siguiente manera (como nos enseña el Álgebra Lineal, ver Apéndice sobre la Matriz de Jordan).

.- Para $\lambda = 1$ resolvemos el sistema

$$(A - I)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

o bien

$$\begin{array}{rcrrrrr} 0 & = & & 2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 \\ 0 & = & & & +x_3 & -x_4 & \\ 0 & = & x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 \\ 0 & = & x_1 & +x_2 & & -3x_4 & -x_5 \\ 0 & = & -x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & -x_5 \end{array}$$

Se comprueba que el vector $V_1 = (-1, -1, -1, -1, 1)$ es una solución.

.- Para $\lambda = i$, de multiplicidad 2, sabemos que $dim Ker(A - iI)^2 = 2$. Ahora necesitamos encontrar un vector $W_1 \in Ker(A - iI)^2 \backslash ker(A - iI)$. Para ello hay que resolver el sistema

$$(A - iI)^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = 0$$

o también, como

$$(A - iI)^2 = \begin{pmatrix} -2-2i & 2-4i & 4-4i & 2+4i & 6-4i \\ 0 & -2i & 2-2i & 2i & 2 \\ -2i & 2-2i & 2-2i & 2i & 4-2i \\ -2i & 2-2i & 4 & -2-4i & 4+2i \\ 2i & -2+2i & -4+2i & -4i & -6 \end{pmatrix}$$

y sabemos por la teoría que esta matriz tiene rango tres, es suficiente con resolver el sistema:

$$\begin{array}{ccccccc} (-2-2i)x_1 & +(2-4i)x_2 & +(4-4i)x_3 & = & (-2-4i)x_4 & +(-6+4i)x_5 \\ & -2ix_2 & +(2-2i)x_3 & = & -2ix_4 & -2x_5 \\ -2ix_1 & +(2-2i)x_2 & +(2-2i)x_3 & = & -2ix_4 & +(-4+2i)x_5 \end{array}$$

La solución en un espacio vectorial de dimensión dos, donde el vector $W_1 = (1, i, -i, 1, 0)$ es un vector solución que comprobamos que verifica que

$$(A - iI)W_1 = W_2 = (-1 - i, 0, -1, -1, 1) \neq 0,$$

luego $W_1 \in Ker(A - iI)^2 \backslash ker(A - iI)$.

(**PARA HACER TODOS ESTOS CÁLCULOS ES CONVENIENTE UTILIZAR ALGÚN PROGRAMA DE CÁLCULO: ¿MATLAB?**)

Ahora la teoría (ver Apéndice sobre la Matriz de Jordan) nos dice que los vectores

$$V_1, W_2, W_1, \overline{W_2}, \overline{W_1}$$

nos permiten pasar a la matriz de Jordan

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & i & 1 & 0 & 0 \\ & 0 & i & 0 & 0 \\ & & & -i & 1 \\ & & & 0 & -i \end{pmatrix}.$$

Para obtener la **matriz de Jordan real**, la teoría nos dice que tenemos que tomar los vectores

$$V_1, ReW_2, ImW_2, ReW_1, ImW_1$$

que dan una matriz de paso en columnas

$$Q = (\, V_1 \; ReW_2 \; ImW_2 \; ReW_1 \; ImW_1 \,) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matriz fundamental. Una matriz fundamental de nuestro problema es

$$\phi(t) = e^{At}Q = Qe^{Jt} =$$

usando el Lema 6

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \operatorname{sen} t & t\cos t & t \operatorname{sen} t \\ 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t & -t\operatorname{sen} t & t\cos t \\ 0 & 0 & 0 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -e^t & \operatorname{sen} t - \cos t & -\operatorname{sen} t - \cos t & t\operatorname{sen} t + (1-t)\cos t & (1-t)\operatorname{sen} t - t\cos t \\ -e^t & 0 & 0 & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ -e^t & -\cos t & -\operatorname{sen} t & \operatorname{sen} t - t\cos t & -t\operatorname{sen} t - \cos t \\ -e^t & -\cos t & -\operatorname{sen} t & -t\cos t + \cos t & -t\operatorname{sen} t + \operatorname{sen} t \\ e^t & \cos t & \operatorname{sen} t & t\cos t & t\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$$

Solución particular. Para calcular la solución concreta que verifica que:

$$x(0) = (1,0,0,0,1)$$

solo hace falta escribir

$$x(t) = \phi(t)\phi^{-1}(0)x(0).$$

Como

$$\phi(0) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \phi^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$x(t) = \phi(t) \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \phi(t) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Así en particular

$$x_1(t) = e^t + 2(\operatorname{sen} t - \cos t) + \operatorname{sen} t + \cos t + t\operatorname{sen} t + (1-t)\cos t - (1-t)\operatorname{sen} t + t\cos t =$$

$$e^t + 2\operatorname{sen} t + 2t\operatorname{sen} t.$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es