ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.

FUNCIONES CONTINUAS.

Fijémosnos en los dos gráficos siguientes.

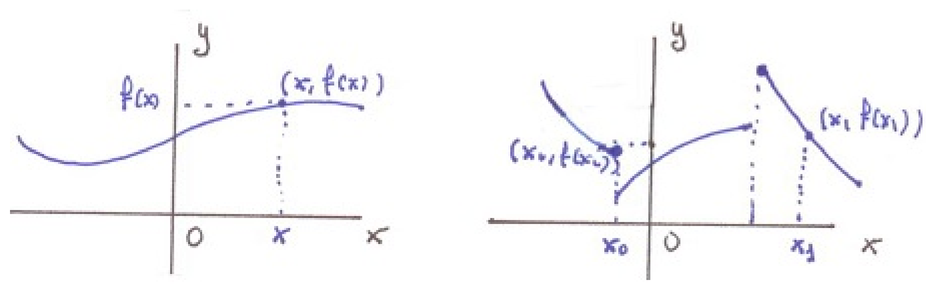

FIGURA 1. Gráfica continua. Gráfica a Trozos.

El primero viene dado por un trazo continuo. El segundo por varios trazos separados. Es algo similar a lo que nos pasaba con los números. Los números naturales se presentan en "saltos". Los núneros reales "fluyen" de forma continua. La idea de **función continua** trata de atrapar matemáticamente al trazo continuo.

Observación. 1.

- *La continuidad de funciones es un trasmisión, una deformación, de la continuidad de $\mathbb{R}$ a trazos curvos.*
- *Los gráficos del dibujo anterior se pueden ver como gráficas de funciones. En el primer caso de una función que llamaremos continua; en el segundo caso de otra que no lo será.*
- *La continuidad es una propiedad que permite trabajar bien con las funciones y decir cosas importantes sobre ellas (lo vamos a ver). Aunque así, no debemos olvidar a las funciones no continuas. Pensemos en una función definida sobre $\mathbb{R}$ y que solo toma los valores 0 y 1 (**señal digital**). No es continua, pero nuestro mundo está lleno de ellas.*

La noción de **continuidad**, intuitiva, va unida a la de **límite**, matemática.

Definición. 1. *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos $a \in \mathbb{R}$, de modo que existe $r > 0$ con*

$$(a - r, a + r) \backslash \{a\} \subset Dom f.$$

a: *Se dice que $b \in \mathbb{R}$ es el límite de la función f en el punto a, escribimos $\lim_{x \to a} f(x) = b$, si para todo $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si*

$$0 < |x - a| < \delta \quad entonces \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

b: *Se dice que una función es* ***continua en el punto*** *a si existe el límite de la función en el punto y es igual al valor de la función en el punto:*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

c: *Se dice que la función f es* ***continua*** *si lo es en cada punto de su dominio (es decir para todo $a \in Dom f$ existe $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$).*

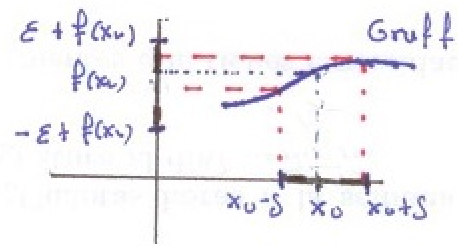

FIGURA 2. Función continua en x_0.

La continuidad es un propiedad **local** de las funciones. Es decir se verifica punto a punto. Una función puede ser continua en un punto y no serlo en otro. Para manejar la continuidad tenemos que dominar el cálculo de límites, algo que vamos a ver. Un poco más adelante nos convenceremos de que esta propiedad de continuidad, con definición parecida a la de límite de una sucesión, nos permite asegurar que la gráfica de la función viene dado por un trazo continuo.

Si nos fijamos en la definición de límite, o de función continua, lo que queremos decir con el "ϵ" y el "δ" es que si los valores de x están cerca de a, entonces los valores de $f(x)$ están cerca del límite, de $f(a)$ en el caso de que f sea continua en a.

Proposición. 1. *Si existe $\lim_{x \to a} f(x) = b$, este límite es único.*

Demostración: La prueba es igual que la que vimos para el resultado análogo para límites de sucesiónes. Si $b_1 < b_2$ son dos límites distintos, entonces existe $\epsilon > 0$ de modo que

$$b_1 < b_1 + \epsilon < b_2 - \epsilon < b_2$$

y así no es posible que para todos los valores de x próximos a a sus imagenes $f(x)$ estén a la vez próximos a b_1 y b_2 $\square$

Veamos ahora la relación entre límite de funciones y de sucesiones. Lo cuál nos permitirá recordar la definición de límite de una sucesión.

Proposición. 2. ***(Caracterización de la continuidad por sucesiones).*** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y consideremos $a \in \mathbb{R}$, de modo que existe $r > 0$ con*

$$(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Dom f.$$

a: *Existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$, si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$, con $x_n \neq a$ para todo n, convergente al punto a se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b.$$

b: *f es continua en a si y solo si para toda sucesión $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ convergente al punto a se tiene que*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a).$$

Demostración: Es suficiente con probar **a** (en el caso **b** se sustituye b por $f(a)$).

- Supongamos que existe $\lim_{x\to a} f(x) = b$ y que tenemos una sucesión convergente $x_n \to_{n\to\infty} a$. Entonces **dado** $\epsilon > 0$ podemos encontrar un $\delta > 0$ de modo que si

  $$0 < |x - a| < \delta \quad \text{entonces} \quad |f(x) - b| < \epsilon.$$

  Para este $\delta > 0$, de la definición de límite de una sucesión, **existe** n_0 **de modo que para todo** $n > n_0$ se tiene que

  $$0 < |a - x_n| < \delta$$

  y **por tanto** $|f(x_n) - b| < \epsilon$. Si nos fijamos en el texto marcado en negrita, descubrimos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = b$.
- Si suponemos ahora que $\lim_{x\to a} f(x) \neq b$, entonces existirá un $\epsilon > 0$ de modo que para todo $\frac{1}{n}$ podemos encontrar $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$ y tal

que $|f(x_n) - b| > \epsilon$. Luego la sucesión así construida converge a a, claro

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \to_{n\to\infty} 0.$$

Pero sus imagenes no convergen a b ya que están lejos de él,

$$|f(x_n) - b| > \epsilon \quad \text{para todo} \quad n$$

□

Continuemos con ejemplos de funciones continuas.

Ejemplos. 1.

- *La función constante $f(x) = b$, para todo $x \in \mathbb{R}$, es continua en todo punto. Claro, para todo a y x*

$$|f(x) - f(a)| = |b - b| = 0.$$

- *La función identidad $f(x) = x$, es continua en todo $a \in \mathbb{R}$. Claro, dado $\epsilon > 0$ si tomamos $\delta = \epsilon$, entonces para todo $|x - a| < \delta = \epsilon$ se tiene que $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \epsilon$.*
- *Sea $f(x) = \frac{1}{x}$. Tomemos $a = 2$ y $\epsilon = \frac{1}{2}$. Vamos a encontrar δ de modo que si $|x - 2| < \delta$, entonces $|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| < \epsilon = \frac{1}{2}$.*

Demostración:

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| = \frac{|2 - x|}{2|x|} \leq |x - 2| \quad \text{siempre que} \quad x \geq \frac{1}{2}.$$

Luego si $\delta = \epsilon = \frac{1}{2}$, entonces $|x - 2| < \delta = \frac{1}{2}$ implica que $x \geq 2 - \frac{1}{2} > 1$ y por tanto

$$|\frac{1}{x} - \frac{1}{2}| \leq |x - 2| < \frac{1}{2}$$

□

En el último ejemplo no hemos llegado a ver que $f(x) = \frac{1}{x}$ sea continua en $a = 2$. Solo hemos "probado" con un $\epsilon = \frac{1}{2}$, no con todos. Aunque esto no es necesario. El cálculo de límites nos va a permitir decidir, en muchos casos, si una función es continua rápidamente. Es lo que veremos a continuación.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

Email address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es