**ANÁLISIS MATEMÁTICO BÁSICO.**

## ASÍNTOTAS DE UNA FUNCIÓN.

Dada una función $f$, los límites (también laterales) infinitos o en el infinito de la función nos dan una idea de como se comporta ésta; su gráfica sobre todo.

**Definición. 1.** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, y sea un punto $a \in \mathbb{R}$ de modo que existe $r > 0$ con $(a - r, a + r)\backslash\{a\} \subset Domf$. Decimos que $f$ tiene una* ***asíntota vertical*** *en la recta $x = a$, si el $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o bien si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$.*

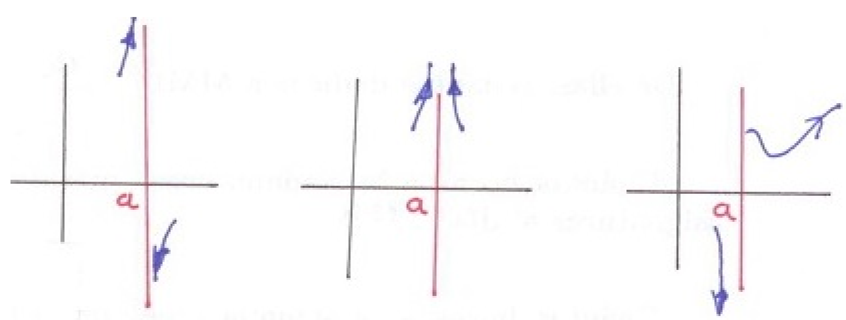


Figura 1. Ejemplos de asíntotas verticales.

**Ejemplo. 1.** *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$. Esta función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el punto $x = 1$. Si calculamos allí los límites laterales*

$$\lim_{x\to a^+} \frac{x}{x-1} = \infty \quad y \quad \lim_{x\to a^-} \frac{x}{x-1} = -\infty,$$

*vemos que la recta $x = 1$ es una asíntota vertical por partida doble.*

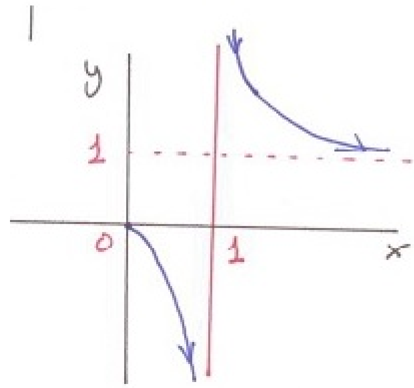


FIGURA 2. Ejemplo asíntota vertical en $x = 1$.

**Definición. 2.** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que $f$ tiene una* ***asíntota horizontal*** *en la recta $y = b$, si el $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ o bien si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$.*

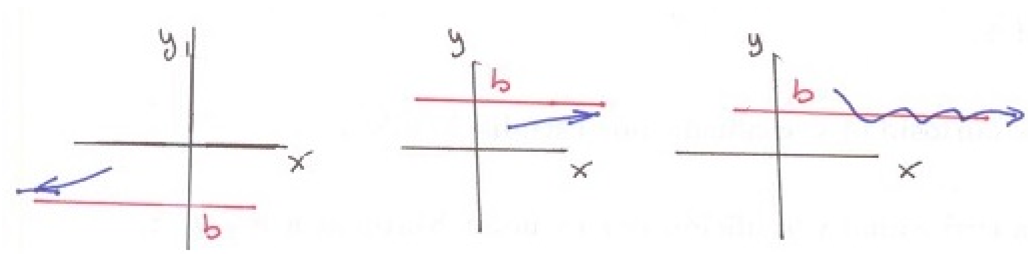


FIGURA 3. Ejemplos de asíntotas horizontales.

**Ejemplo. 2.** *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2+1}$. Ésta es una función continua en todo $\mathbb{R}$. Si calculamos los límites en el infinito*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1 \quad y \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1,$$

*vemos que la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal de la función.*

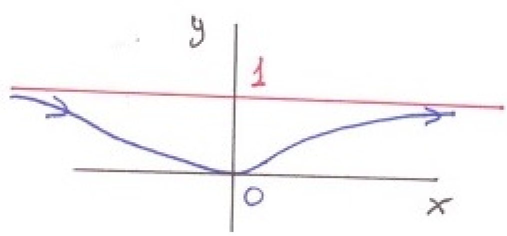


FIGURA 4. Ejemplo de asíntota horizontal en $y = 1$.

**Definición. 3.** *Sea una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Decimos que $f$ tiene una* ***asíntota oblicua*** *en la recta $y = ax + b$, si el $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\lim_{x\to\infty} f(x) - ax = b$; o bien si el $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) - ax = b$.*

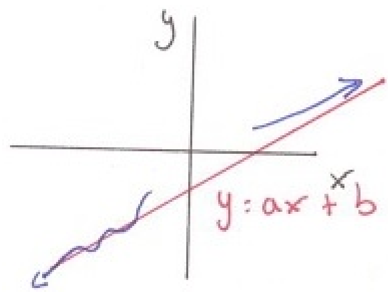


FIGURA 5. Ejemplo de asíntota oblicua.

**Ejemplo. 3.** *Consideramos la función $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^2 + 4x - 5}$. Como es una función racional donde el grado del numerador es una unidad mayor que él del denominador es posible que tenga una asíntota oblicua. Hagamos el cálculo.*

**Demostración:** $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$. Por otro lado

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2 + 3}{x^2 + 4x - 5} = -3.$$

Luego la recta $y = x - 3$ es una asíntota oblicua tanto en infinito como en menos infinito. □

## REFERENCIAS

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, FACULTAD DE MATEMÁTICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE, 28040 MADRID, SPAIN

*Email address*: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`