AMPLIACIÓN DE MATEMÁTICAS

EL CIRCUITO RC.

Un circuito R.C.

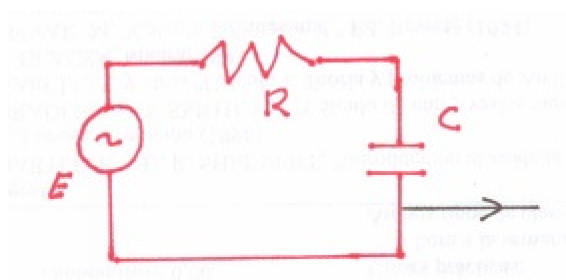

FIGURA 1. Circuito RC

es un circuito eléctrico simple en él que hallamos una única resistencia R y un condensador C. La teoría de circuitos nos dice que las caídas de voltaje producidas por el condensador y la resistencia son

$$V_C = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds \qquad \text{y} \qquad V_R = -RI$$

respectivamente. Por la ley de Kirchhoff las caídas de potencial se compensan y por tanto

$$E(t) - V_C - V_R = E(t) - \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds - RI = 0 \qquad (*).$$

Ahora si $V(t) = -\frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} I(s)ds$, derivando $V'(t) = \frac{1}{C}I(t)$ y despejando $I(t) = CV'(t)$. Con esto y de $(*)$ se sigue que

$$E(t) = V(t) + RCV'(t),$$

donde E es el voltaje de entrada, en nuestra ecuación el término independiente; y V es el voltaje de salida, en la ecuación la función incógnita. Luego nuestro cicuito lo hemos modelizado por una E.D.O. lineal de primer orden no homogénea.

$$\begin{cases} V'(t) = -\frac{1}{RC}V(t) + E(t) \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

La condición inicial indica que el circuito esta abierto en el instante cero y por tanto no hay ninguna corriente en él. Resolvamos la ecuación.
Solución: la ecuación homogénea asociada es $V'(t) = -\frac{1}{RC}V(t)$. Si separamos variables nos queda $\frac{V'(t)}{V(t)} = -\frac{1}{RC}$. Integrando llegamos a una solución general

$$V(t) = K_0 e^{-\frac{1}{RC}t} \text{ donde } K_0 \geq 0.$$

Parece razonable que en el instante inicial nos aparezca un valor positivo.

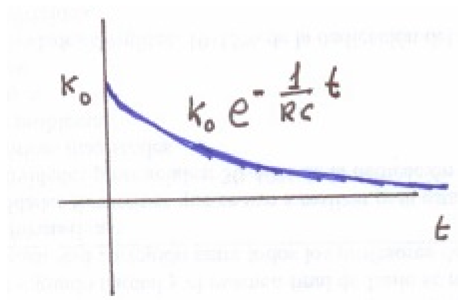

FIGURA 2. Solución de la ecuación homogénea.

Para resolver la ecuación no homogénea, usando el método de variación de las constantes. Probaremos una función del tipo $V_0(t) = K(t)e^{-\frac{1}{RC}t}$ y obtendremos que $K(t) = \int_0^t E(s)e^{\frac{1}{RC}s}ds$. Ahora el caso abstracto general no nos interesa. Vamos a suponer que E es constante.

$$\begin{cases} V'(t) = -\frac{1}{RC}V(t) + E \\ V(0) = 0 \end{cases}$$

Así $V_0(t) = K(t)e^{-\frac{1}{RC}t}$, derivando y haciendo que sea una solución,

$$V_0'(t) = K'(t)e^{-\frac{1}{RC}t} + K(t)\frac{-1}{RC}e^{-\frac{1}{RC}t} = \frac{-1}{RC}K(t)e^{-\frac{1}{RC}t} + E.$$

Despejando la función $K'(t)$ e integrando

$$K'(t) = Ee^{\frac{1}{RC}t} \text{ y } K(t) = \int Ee^{\frac{1}{RC}t}dt = ERCe^{\frac{1}{RC}t}.$$

Luego la solución general del problema no homogéneo es

$$V(t) = ERC + Ke^{-\frac{1}{RC}t} \text{ donde } K \in \mathbb{R}.$$

Si $V(0) = 0$, entonces $0 = ERC + K$ y así K tiene que tomar el valor $K = -ERC$.

El circuito RC como un filtro paso bajo

Dado un circuito RC,

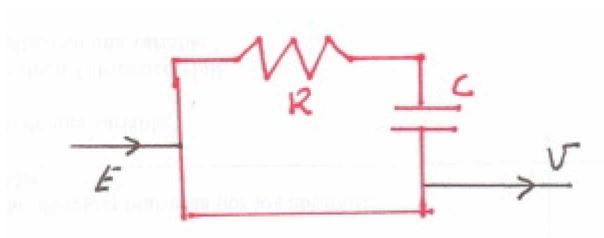

Figura 3. Circuito RC.

hemos visto que la señal de salida V verifica la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$E(t) = V(t) + RCV'(t).$$

Aplicando la Transformada de Fourier a ambos lados de la igualdad y teniendo en cuenta las propiedades de esta transformada tenemos que

$$\widehat{E}(\lambda) = \widehat{V}(\lambda) + RC(i\lambda)\widehat{V}(\lambda),$$

despejando

$$\widehat{V}(\lambda) = \widehat{E}(\lambda)\frac{1}{1 + RCi\lambda}.$$

La función en $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(\lambda) = |1 + RCi\lambda|$ tiende a infinito cuando $|\lambda| \to \infty$. Además no se anula nunca en λ, ya que $f(\lambda) = 0$ implica que $\lambda = \frac{i}{RC} \notin \mathbb{R}$.

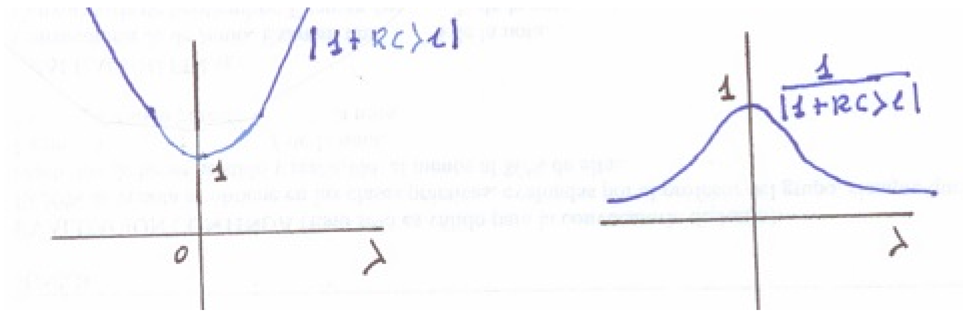

Figura 4. Gráficas de $|f|$ y $1/|f|$.

Luego la acción del circuito RC sobre las frecuencias de E es que si $|\lambda|$ se hace grande las frecuencias λ de $E(t)$ se amortiguan mucho, quedando más o menos constantes las frecuencias λ cercanas a cero $(\widehat{V}(0) = \widehat{E}(0)\frac{1}{1+RCi0} = \widehat{E}(0))$.

Referencias

Departamento de Análisis Matemático, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es