# REDUCCIÓN DE UNA MATRIZ A SU FORMA CANÓNICA DE JORDAN

**Notación:** $A$ será tanto una aplicación líneal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$, como la matriz asociada a dicha aplicación referida a una base de $\mathbb{R}^n$. $I$ designa la matriz unidad (o aplicación identidad). $KerA$ es el núcleo de la aplicación A.

**1.-** Consideramos una aplicación $A$ con un **único autovalor** $\lambda = 0$. Existe una base de $\mathbb{R}^n$ para la cuál la matriz asociada a la aplicación $A$ referida a dicha base es del tipo:

$$(1) \qquad \begin{pmatrix} J_1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & J_{s-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & J_s \end{pmatrix} \qquad \text{donde} \qquad J_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & 0 \\ & & 0 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$i = 1, 2, ..., s$ con $s \leq n$ y donde la suma de los ordenes de la matrices $J_i$ es igual a $n$. Veamos como se construye dicha base.

Existe un natural $N \leq n$ para el que se tiene que:

$$KerA \subset KerA^2 \subset KerA^3 \subset ...... \subset KerA^{N-1} \subset KerA^N = \mathbb{R}^n.$$

Además para cada vector $v \in KerA^j \backslash KerA^{j-1}$, con $1 \leq j \leq N$, se tiene que los vectores:

$$(2) \qquad A^{j-1}v, A^{j-2}v, ....., Av, v$$

verifican que:

1. $A^{j-i}v \in KerA^i \backslash KerA^{i-1}$ con $1 \leq i \leq j$. Y por tanto los vectores son linealmente independientes.

2. El subspacio vectorial engendrado por los vectores es invariante por la aplicación $A$ y la matriz asociada a $A$ restringida al subespacio considerado respecto de la base de vectores que los engendran es de tipo $J_i$ (OBSERVACIÓN: hay que conservar el orden de los vectores de la cadena).

**Para hallar la base** de $\mathbb{R}^n$ para la cuál la matriz de la aplicación $A$ sea de tipo (1) se hace del modo siguiente:

se toman $v_1, v_2, ...., v_w$ el mayor número de vectores linealmente independientes de

$$KerA^N \backslash KerA^{N-1},$$

de modo que el espacio que engendran corta a $KerA^{N-1}$ únicamente en el cero. Las cadena de tipo (2) asociadas a cada $v_i$ nos dan una familia de vectores linealmente independientes, que llevan asociados $w$ subespacios invariantes. Si esta familia forma una base de $\mathbb{R}^n$ hemos terminado. En caso contrario se consideran:

$u_1, u_2, ..., u_{w'}$ el mayor número de vectores linealmente independientes, entre ellos y los de las cadenas anteriores, de $KerA^{N-1} \backslash KerA^{N-2}$, de modo que el espacio que engendran corta a $KerA^{N-2}$ únicamente en el cero. Se consideran las cadenas de tipo (2) asociadas a cada $v_i$

y a cada $u_i$; son vectores linealmente independientes, que llevan asociados $w + w'$ subespacios invariantes. Si estos vectores forma una base de $\mathbb{R}^n$ hemos terminado. Si no, se sigue el proceso hasta completar una base (observemos que la aplicación $\lambda I$ no cambia de matriz al cambiar la base).

**2.-** Si ahora tenemos una matriz $A$ con un **único autovalor** $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos la aplicación $A' = A - \lambda I$; ésta es una aplicación con un único autovalor igual a cero. De **1** se deduce que se puede encontrar un cambio de base de modo que la matriz asociada a la aplicación $A$ es del tipo $(1) + \lambda I$.

OBSERVACIÓN: $s$, el número de cajas $J_i$, es igual a $dimKer(A - \lambda I)$.
El tamaño de la cajas $J_i$ es dado por la longitud, número de eslavones, de las cadenas de tipo (2) y por tanto dependen de las diferencias

$$dimKer(A - \lambda I)^j - dimKer(A - \lambda I)^{j-1}, \qquad 1 < j \leq N$$

**3.-** Sea $A$ una aplicación lineal de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$, donde $\mathbb{C}$ es el cuerpo de los números complejos. La matriz $A$ asociada puede ser real o compleja. Los resultados de los dos apartados anteriores **1** y **2** son también válidos para autovalores complejos $\lambda \in \mathbb{C}$, aunque la nueva base tenemos que tomarla en $\mathbb{C}^n$

**4.-** Por último consideramos el caso de una aplicación $A$ con autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ...., \lambda_r$ con multiplicidad $m_1, m_2, ..., m_r$ respectivamente; la suma de todos los $m_i$ es igual a $n$.
Si algún autovalor es complejo tendremos que considerar $A$ definida de $\mathbb{C}^n$ en $\mathbb{C}^n$.
Sea $N_i = Ker(A - \lambda_i I)^{m_i}$, para $i = 1, 2, ..., r$. Estos subespacios vectoriales verifican que:

1. $dimN_i = m_1$ para todo $i$.
2. $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus N_2 \oplus .... \oplus N_r$ ( en su caso $\mathbb{C}^n$).
3. Cada $N_i$ es un **subespacio invariante** de la aplicación $A$
4. La aplicación $A$ restringida a cualquiera de los subespacios $N_i$ tiene un único autovalor $\lambda_i$ de multiplicidad $m_i$.

La descomposición anterior junto con **1** y **2** nos permite encontrar una base respecto de la cúal $A$ tine un matriz asociada de tipo **Matriz de Jordan** compleja. Esta base no es única.

**5.-** En el caso de que $A$ sea una **matriz real**, de coeficientes reales, con autovalores reales y/o complejos, para no trabajar con **autovectores** con coordenadas complejas podemos usar que:

**a** Si $\lambda$ es un **autovalor complejo** entonces su conjugado también lo es con la misma multiplicidad y además

$$dimKer(A - \lambda I)^j = dimKer(A - \overline{\lambda} I)^j \qquad j = 1, 2, ......$$

**b** Una vez calculada la matriz de Jordan compleja asociada a $A$ (como en el punto **4**), así como la base que hace que $A$ tenga esta matriz de Jordan como matriz asociada, si aparece una **caja** de la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{con } \lambda = a+bi, \quad \text{entonces la caja} \begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & 0 & \cdots & & 0 \\ 0 & \overline{\lambda} & 1 & & & 0 \\ 0 & 0 & \overline{\lambda} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & 1 \\ 0 & \cdots & & & 0 & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

aparece también. Además si $w_1, w_2, ..., w_l$ son los vectores de la base que generan el subespacio invariante que da lugar a la primera caja, entonces sus conjugados $\overline{w_1}, \overline{w_2}, ..., \overline{w_l}$ son a su vez los vactores de la base que generan el subespacio invariante que da lugar a la segunda caja.

**c** Si se toman los vectores

$$g_i = Rew_i = \frac{1}{2}(w_i + \overline{w_i}) \qquad i = 1, 2, ..., l$$
$$h_i = Imew_i = \frac{1}{2i}(w_i - \overline{w_i}) \qquad i = 1, 2, ..., l$$

entonces los vectores reales $g_1, h_1, g_2, h_2, ...., g_l, h_l$ son linealmente independientes y generan un subespacio invariante por $A$ de modo que la matriz de $A$ referida a esta nueva base del subespacio transforma las dos cajas anteriores en una única caja de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 & & & & \cdots & & & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & & & & & & & 0 \\ & & a & b & 1 & 0 & & & & & \\ & & -b & a & 0 & 1 & & & & & \\ & & & & a & b & & & & & \\ & & & & -b & a & & & & & \\ \vdots & & & & & \ddots & & & & & \\ & & & & & & & a & b & 1 & 0 \\ & & & & & & & -b & a & 0 & 1 \\ & & & & & & & & & a & b \\ 0 & & & & & \cdots & & & & -b & a \end{pmatrix}$$

OBSEVACIÓN: El orden de los vectores $w_1, w_2, ..., w_l$ es el que se obtiene en las cadenas de tipo (2), así como él de los vectores $\overline{w_1}, \overline{w_2}, ..., \overline{w_l}$. El orden dado $g_1, h_1, g_2, h_2, ...., g_l, h_l$ es el adecuado para que la matriz tenga la forma de arriba.