ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE.

La **Transformada de Laplace** es un mecanismo para transformar funciones reales de una variable real. Este proceso es especialmente útil para resolver E.D.O. lineales y sistemas de E.D.O. lineales con coeficientes constantes.

Definición 1. *Dada una función $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ se llama **Transformada de Laplace** de f a la función $Lf : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por*

$$Lf(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

para todo $s \geq 0$ donde la integral anterior exista.

Vamos a ver como se calculan las transformadas de Laplace de las funciones más 'corrientes'.

Ejemplo 1. *Sea $f(t) \equiv 1$, la función constantemente igual a 1. Su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{e^{-st}}{-s} \Bigg|\begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} = \lim_{t\to\infty} e^{-st} + \frac{1}{s} = \frac{1}{s}$$

Ejemplo 2. *Sea $f(t) = t$. Usando el método de integración por parte vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty te^{-st}dt = \frac{te^{-st}}{-s} \Bigg|\begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{1}{s^2}.$$

Ejemplo 3. *Sea $f(t) = e^{-\alpha t}$ con $\alpha > 0$. Usando el **Ejemplo 1** vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s+\alpha)t}dt = \frac{1}{s+\alpha}.$$

Ejemplo 4. *Sea $f(t) = e^{rt}$ con $r > 0$. Usando la integración por partes y el **Ejemplo 1** vemos que su transformada de Laplace es*

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{rt}e^{-st}dt = \int_0^\infty e^{-(s-r)t}dt$$

$$= \frac{e^{-(s-r)t}}{-(s-r)} \Bigg|\begin{matrix} \infty \\ 0 \end{matrix} = \begin{cases} \infty & si \quad s \leq r \\ \frac{1}{s-r} & si \quad s > r. \end{cases}$$

Este es un primer ejemplo donde vemos que no siempre existe la transformada de Laplace o al menos en todo el dominio $[0, \infty)$.

Los ejemplos anterior nos sugieren el siguiente resultado.

Proposición 1. *Si existe la transformada de Laplace de una función g y se define $f(t) = e^{-\alpha t} g(t)$, entonces la transformade de Laplace de f es $Lf(s) = Lg(s+\alpha)$, para todo $s \geq -\alpha$.*

Demostración: La prueba es hacer las cuentas de los dos ejemplos anteriores.

$$Lf(s) = \int_0^\infty e^{-\alpha t} g(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty g(t) e^{-(s+\alpha)t} dt = Lg(s+\alpha).$$

Como existe $Lg(s)$ para todo $s \geq 0$, entonces si $s \geq -\alpha$, se sigue que existe $Lg(s+\alpha) = Lf(s)\Box$

Ejemplo 5. *Sea $f(t) = \operatorname{sen}(\beta t)$. Usando la integración por partes dos veces vemos que su transformada de Laplace es*

$$\begin{aligned} Lf(s) = \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt &= \frac{\operatorname{sen}(\beta t) e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty + \frac{\beta}{s} \int_0^\infty \cos(\beta t) e^{-st} dt \\ &= \frac{\beta}{s} \left[\frac{\cos(\beta t) e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \frac{\beta}{s} \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt \right] \\ &= \frac{\beta}{s^2} - \frac{\beta^2}{s^2} \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt. \end{aligned}$$

Ahora despejando la integral que nos interesa

$$(1 + \frac{\beta^2}{s^2}) \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt = \frac{\beta}{s^2}$$

y así

$$\int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt = \frac{\beta}{s^2} (1 + \frac{\beta^2}{s^2})^{-1} = \frac{\beta}{s^2 + \beta^2}.$$

El ejemplo y la proposición anteriores nos permiten calcular de forma más rápida los ejemplos que siguen.

Ejemplo 6. *Sea $f(t) = \cos(\beta t)$. Usando la integración por partes vemos que su transformada de Laplace es*

$$\begin{aligned} Lf(s) = \int_0^\infty \cos(\beta t) e^{-st} dt &= \frac{\cos(\beta t) e^{-st}}{-s} \Big|_0^\infty - \frac{\beta}{s} \int_0^\infty \operatorname{sen}(\beta t) e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s} - \frac{\beta}{s} \frac{\beta}{s^2 + \beta^2} = \frac{s}{s^2 + \beta^2}. \end{aligned}$$

Ejemplo 7. $L[e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$ *y*

$L[e^{-\alpha t} \cos(\beta t)](s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \beta^2}$.

Consideramos ahora las funciones **hiperbólicas**

- $\operatorname{senh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$ el **seno hiperbólico**; y
- $\cosh t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$ el **seno hiperbólico**.
- Observemos que $\operatorname{senh}' t = \cosh t$ y que $\operatorname{senh}'' t = \cosh' t = \operatorname{senh} t$. Es fácil ver también que $\cosh^2 t - \operatorname{senh}^2 t = 1$.

Para estas funciones, en el caso del seno hiperbólico integrando dos veces por parte como en el ejemplo 6 y procediendo después como en los ejemplos 7 y 8 tenemos que

Ejemplo 8.

$$L[\operatorname{senh}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{s^2 - \beta^2} \qquad y \qquad L[\cosh(\beta t)](s) = \frac{s}{s^2 - \beta^2};$$

$$L[e^{-\alpha t} \operatorname{senh}(\beta t)](s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2 - \beta^2} \; y \; L[e^{-\alpha t} \cosh(\beta t)](s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 - \beta^2}$$

Otro resultado interesante para calcular transformadas de Laplace es el siguiente.

Proposición 2. *Si f es una función para la que existe su transformada de Laplace y está es una función n-veces derivable en s se tiene que*

$$L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n Lf(s)}{ds^n} = (-1)^n (Lf)^{n)}(s).$$

Demostración: Probamos a continuación el caso $n = 1$, después se procede por inducción.

$$L[tf(t)](s) = \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty -f(t)\frac{de^{-st}}{ds}dt$$

en ciertas condiciones (sobre la función f que verifican las funciones que aparecen en ingeniería) ocurre que

$$= -\frac{d}{ds}[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt] = (-1)(Lf)'(s)\square$$

Usando este resultado, tenemos que

Ejemplo 9.

$$L[t \operatorname{sen}(\beta t)](s) = \frac{2s\beta}{(s^2+\beta^2)^2} \qquad y \qquad L[t\cosh(\beta t)](s) = \frac{s^2-\beta^2}{(s^2+\beta^2)^2}.$$

Todo la anterior y algo más lo resumimos en la siguiente **tabla de Transformadas de Laplace** que será muy útil sobre todo en el llamado **problema inverso** que se nos va a presentar un poco más adelante.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE

Las siguientes funciones tienen por Transformadas de Laplace las funciones en s que figuran a su lado:

(1) Si $f(t) = 1$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s}$
(2) Si $f(t) = \text{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2+\alpha^2}$
(3) Si $f(t) = \cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2+\alpha^2}$
(4) Si $f(t) = e^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{s+\alpha}$
(5) Si $f(t) = \text{senh}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\alpha}{s^2-\alpha^2}$
(6) Si $f(t) = \cosh(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s}{s^2-\alpha^2}$
(7) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\,\text{sen}(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
(8) Si $f(t) = e^{-\alpha t}\cos(\beta t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$
(9) En general, dada $f(t)$, entonces $L[e^{-\alpha t} f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$
(10) Si $f(t) = t^n$, entonces $Lf(s) = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}}$, $(*)$
(11) Si $f(t) = te^{-\alpha t}$, entonces $Lf(s) = \frac{1}{(s+\alpha)^2}$
(12) Si $f(t) = t\,\text{sen}(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{2\alpha s}{(s^2+\alpha^2)^2}$
(13) Si $f(t) = t\cos(\alpha t)$, entonces $Lf(s) = \frac{s^2-\alpha^2}{(s^2+\alpha^2)^2}$
(14) En general, dada $f(t)$, entonces $L[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{\partial^n Lf(s)}{\partial s^n}$

$(*)$ La función Γ es la función la función Gamma de Euler. Esta función se define por

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx$$

Es claro que $\Gamma(1) = 1$. También se prueba que $\Gamma(2) = 1$ y que $\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$. Así se deduce que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\Gamma(n+1) = n!$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es