CÁLCULO DE TRANSFORMADAS INVERSAS.

Para resolver un circuito RLC necesitamos encontrar una función h de modo que su transformada de Laplace sea la función de transferencia del sistema $Lh(s) = \frac{1}{s^2+a_1s+a_2}$ (**problema inverso**). Esta función es la inversa del polinomio característico. Veamos que h depende de las raíces de este polinomio. Sean λ_1, λ_2 las dos raíces de la ecuación característica $\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0$.

- Si λ_1, λ_2 son dos raíces reales distintas, entonces $s^2 + a_1s + a_2 = (s-\lambda_1)(s-\lambda_2)$ y usando el método de descomposición en fracciones simples
$$\frac{1}{s^2+a_1s+a_2} = \frac{A}{s-\lambda_1} + \frac{B}{s-\lambda_2} = \frac{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}}{s-\lambda_1} - \frac{\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}}{s-\lambda_2}$$
Ahora, mirando en las tablas y teniendo en cuenta la linealidad de la transformada de Laplace deducimos que
$$h(t) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_1 t} - \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}e^{\lambda_2 t}$$
- Si $\lambda_1 = \lambda_2$ es una raíz real doble, entonces $s^2+a_1s+a_2 = (s-\lambda_1)^2$ y
$$\frac{1}{s^2+a_1s+a_2} = \frac{1}{(s-\lambda_1)^2}.$$
Mirando las tablas de transformadas vemos que $h(t) = te^{\lambda_1 t}$.

Observación 1. *En las tablas no vamos a encontrar directamente la función* $\frac{1}{(s-\lambda_1)^2}$*; encontramos* $1/s^2 = L[t](s)$ *y además que* $L[e^{-\alpha t}f(t)](s) = Lf(s+\alpha)$*. Combinando ambas expresiones se llegamos a que* $h(t) = te^{\lambda_1 t}$*.*

- Si $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ y $\lambda_1 = \alpha - \beta i$ dos raíces complejas conjugadas, entonces

$$s^2+a_1s+a_2 = (s-(\alpha+\beta i))(s-(\alpha-\beta i)) = s^2-2\alpha s+\alpha^2+\beta^2 = (s-\alpha)^2+\beta^2,$$

por tanto
$$\frac{1}{s^2+a_1s+a_2} = \frac{1}{(s-\alpha)^2+\beta^2}.$$

Así, mirando 'adecuadamente' las tablas encontramos que

$$h(f) = \frac{1}{\beta} e^{\alpha t} \operatorname{sen}(\beta t).$$

Observación 2. *Con mucha generalidad, cuando se usa la transformada de Laplace sobre un problema (una E.D.O. lineal de segundo orden, por ejemplo) éste queda reducido al problema inverso de invertir*

$$\frac{Q(s)}{P(s)} = Lx(s)$$

*donde Q y P son polinomios en s. El **método de descomposición en fracciones simples** y un vistazo cuidadoso a las tablas de transformadas nos permite encontrar la función $x(t)$ que estamos buscando.*

Ejemplo 1. *Calculemos f conociendo su transformada de Laplace* $Lf(s) = \dfrac{s}{s^2 - 4s + 3}$.

En primer lugar buscamos la raíces del denominador, $s^2 - 4s + 3 = 0$; en este caso es fácil ver que son 1 y 3 y así $s^2 - 4s + 3 = (s-1)(s-3)$. Ahora haciendo la descomposición en fracciones simples

$$\frac{s}{s^2 - 4s + 3} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-3},$$

y resolviendo el sistema

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 1 \\ -3A & - & B & = & 0 \end{array}$$

se sigue que

$$\frac{s}{s^2 - 4s + 3} = \frac{-1/2}{s-1} + \frac{3/2}{s-3}.$$

Ya solo queda mirar las tablas para concluir que $f(t) = (-1/2)e^t + (3/2)e^{3t}$.

Ejemplo 2. *Sea* $Lf(s) = \dfrac{s+1}{s^2+1}$.

En este caso es fácil hacer la descomposición

$$\frac{s+1}{s^2+1} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Mirando las tablas concluimos que $f(t) = \operatorname{sen} t + \cos t$.

Ejemplo 3.

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + x(t) = t \\ \quad x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando transformadas de Laplace, teniendo en cuenta que las condiciones iniciales son nulas, o bien aplicando directamente la función de transferencia, se tiene que

$$Lx(s) = \frac{L[t](s)}{s^2 - 2s + 1} = \frac{1/s^2}{s^2 - 2s + 1}.$$

Procedemos usando la **descomposición en fracciones simples** y así teniendo en cuenta que el denominador tiene dos raíces dobles

$$Lx(s) = \frac{1/s^2}{s^2-2s+1} = \frac{1}{s^2(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{(s-1)} + \frac{D}{(s-1)^2}.$$

Luego

$$As(s-1)^2 + B(s-1)^2 + Cs^2(s-1) + Ds^2 = 1 \qquad \text{o lo que es equivalente}$$
$$(A+C)s^3 + (-2A+B-C+D)s^2 + (A-2B)s + B = 1,$$

lo que da el sistema lineal

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} & & B & & & & & = & 1 \\ A & - & 2B & & & & & = & 0 \\ -2A & + & B & - & C & + & D & = & 0 \\ A & & & + & C & & & = & 0 \end{array}$$

cuya solución es $B = 1, A = 2, C = -2$ y $D = 1$. La solución en transformadas es

$$Lx(s) = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{-2}{(s-1)} + \frac{1}{(s-1)^2}.$$

Mirando las tablas obtenemos que

$$x(t) = 2 + t - 2e^t + te^t,$$

es la solución.

(**Apéndice:** hay otra forma de llegar a esta solución, ver Apéndice sobre **convolución**). Tenemos que

$$Lx(s) = \frac{L[t](s)}{s^2-2s+1} = \frac{1/s^2}{s^2-2s+1} = L[t](s)Lh(s).$$

donde h es una función cuya transformada de Laplace es la función de transferencia $\frac{1}{s^2-2s+1} = \frac{1}{(s-1)^2}$. Así mirando las tablas $h(t) = te^t$. Usando la **convolución** e integrando por partes

$$x(t) = (u) * (ue^u)(t) = \int_0^t (t-u)ue^u du = t\int_0^t ue^u du - \int_0^t u^2e^u du$$
$$= t\int_0^t ue^u du - \left[u^2e^u \Big|_0^t - 2\int_0^t ue^u du \right] = (t+2)\int_0^t ue^u du - t^2e^t$$
$$= -t^2e^t + (t+2)\left[ue^u \Big|_0^t - \int_0^t e^u du \right]$$
$$= -t^2e^t + (t+2)(te^t - e^t + 1) = te^t - 2e^t + t + 2,$$

que es la misma solución que habiamos obtenido antes.

Ejemplo 4.

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 6y = e^{-2x} \\ y(0) = 1, \; y'(0) = 0. \end{cases}$$

Aplicando la transformada de Laplace, teniendo en cuenta que las **condiciones iniciales no son nulas**, tenemos que

$$\begin{aligned} L[y''](s) + 5L[y'](s) + 6Ly(s) &= L[e^{-2x}](s) \\ \Leftrightarrow s^2Ly(s) - sy(0) + 5(Ly(s) - y(0)) + 6Ly(s) &= \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow (s^2+5s+6)Ly(s) - s - 5 &= \frac{1}{s+2} \\ \Leftrightarrow Ly(s) = [\frac{1}{s+2} + s + 5]\frac{1}{s^2+5s+6} &= \frac{s^2+7s+11}{(s^2+5s+6)(s+2)} \\ = \frac{s^2+7s+11}{(s+3)(s+2))(s+2)} &= \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{(s+2)^2}. \end{aligned}$$

ahora tenemos que

$$A(s+2)^2 + B(s+3)(s+2) + C(s+3) = s^2 + 7s + 11$$

$$(A+B)s^2 + (4A+5B+C)s + (4A+6B+3C) = s^2 + 7s + 11.$$

Lo que da el sistema lineal

$$\begin{array}{ccccccc} A & + & B & & & = & 1 \\ 4A & + & 5B & + & C & = & 7 \\ 4A & + & 6B & + & 3C & = & 11, \end{array}$$

cuya solución es $C = 1,\ B = 2$ y $A = -1$. La solución en transformadas es

$$Lx(s) = \frac{-1}{s+3} + \frac{2}{s+2} + \frac{1}{(s+2)^2}.$$

Mirando las tablas obtenemos que

$$y(x) = -e^{-3x} + 2e^{-2x} + xe^{-2x}.$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`