ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

EJEMPLO.

Ejemplo 1. *Hay que resolver el problema de valor inicial:*

$$\begin{array}{rcccccc} x_1' & = & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & -2x_4 & +2x_5 \\ x_2' & = & & x_2 & +x_3 & -x_4 & \\ x_3' & = & x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & +x_5 \\ x_4' & = & x_1 & +x_2 & & -2x_4 & -x_5 \\ x_5' & = & -x_1 & -x_2 & -x_3 & +2x_4 & \end{array}$$

con $x(0) = (1, 0, 0, 0, 1)$.

Este problema lo resolvimos encontrado la exponencial de la matriz correspondiente (ver la lección sobre exponenciales de matrices no diagonalizables). Ahora vamos a resolverlo usando la **Transformada de Laplace**.

$$\begin{array}{rcccccccc} Lx_1'(s) & = & sLx_1 - 1 & = & Lx_1 & +2Lx_2 & +2Lx_3 & -2Lx_4 & +2Lx_5 \\ Lx_2'(s) & = & sLx_2 & = & & Lx_2 & +Lx_3 & -Lx_4 & \\ Lx_3'(s) & = & sLx_3 & = & Lx_1 & +Lx_2 & +Lx_3 & -Lx_4 & +Lx_5 \\ Lx_4'(s) & = & sLx_4 & = & Lx_1 & +Lx_2 & & -2Lx_4 & -Lx_5 \\ Lx_5'(s) & = & sLx_5 - 1 & = & -Lx_1 & -Lx_2 & -Lx_3 & +2Lx_4 & \end{array}$$

Este es un sistema algebraico de 5 ecuaciones lienales con cinco incógnita: Lx_1, Lx_2, Lx_3, Lx_4 y Lx_5. Tenemos que resolver el sistema:

$$\begin{array}{rcccccc} -1 & = & (1-s)A & +2B & +2C & -2D & +2E \\ 0 & = & & (1-s)B & +C & -D & \\ 0 & = & A & +B & +(1-s)C & -D & +E \\ 0 & = & A & +B & & -(2+s)D & -E \\ -1 & = & -A & -B & -C & +2D & -sE \end{array}$$

Hacemos el determinante de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} (1-s) & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & (1-s) & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & (1-s) & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -(2+s) & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -s \end{vmatrix} = \ldots\ldots\ldots = (1-s)(s^2+1)^2.$$

Usando la regla de Cramer

$$A = Lx_1(s) = \frac{1}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & (1-s) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & (1-s) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -(2+s) & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -s \end{vmatrix} =$$

restando a la primera fila la última

$$\frac{1}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} -0 & 3 & 3 & -4 & 2+s \\ 0 & (1-s) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & (1-s) & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -(2+s) & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -s \end{vmatrix} =$$

$$\frac{-1}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} 3 & 3 & -4 & 2+s \\ (1-s) & 1 & -1 & 0 \\ 1 & (1-s) & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -(2+s) & -1 \end{vmatrix} =$$

restando a la primera fila tres veces la última y restando a la tercera fila la última

$$\frac{-1}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} 0 & 3 & 2+3s & 5+s \\ (1-s) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & (1-s) & 1+s & 2 \\ 1 & 0 & -(2+s) & -1 \end{vmatrix} =$$

desarrollando por la primera columna

$$\frac{(1-s)}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} 3 & 2+3s & 5+s \\ (1-s) & 1+s & 2 \\ 0 & -(2+s) & -1 \end{vmatrix} +$$

$$\frac{1}{(1-s)(s^2+1)^2}\begin{vmatrix} 3 & 2+3s & 5+s \\ 1 & -1 & 0 \\ (1-s) & 1+s & 2 \end{vmatrix} = ...$$

$$....\frac{(1-s)(s^3+3s^2+7s+1)-4s}{(1-s)(s^2+1)^2} = ... =$$

$$....\frac{(-s^4-2s^3-4s^2+2s+1}{(1-s)(s^2+1)^2} =$$

por separación en fracciones simples

$$\frac{K_1}{(1-s)} + \frac{K_2 s + K_3}{(s^2+1)} + \frac{K_4 s + K_5}{(s^2+1)^2} = ...$$

calculando K_1, K_2, K_3, K_4 y K_5 resolviendo el sistema correspondiente

$$\frac{-1}{(1-s)} + \frac{2}{(s^2+1)} + \frac{4s}{(s^2+1)^2} = Lx_1(s).$$

Mirando en la tablas de transformadas de Laplace, llegamos a que

$$x_1(t) = -e^t + 2\operatorname{sen} t + 2t\operatorname{sen} t,$$

lo que coincide con lo calculamos anteriormente.

El resto de cálculos queda como **Ejercicio.**

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain

E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`