ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

LA CONVOLUCIÓN.

Definición 1. *Dadas dos funciones $f, g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ (continuas) se define la **convolución** entre ambas por*

$$f * g(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)ds \qquad \textit{donde} \qquad t > 0.$$

La **convolución** $f*g$ es una nueva función definida sobre la semirecta $[0, \infty)$; si las funciones f y g son continuas (o continuas a trozos) la integral que define la convolución siempre existe.

Observación 1. *La **convolución** aquí definida coincide con la definición dada en el contexto de la **transformada de Fourier** si la restringimos a funciones f y g que sean nulas en todo $t < 0$.*

En efecto, la definición de convolución que teníamos era

$$f * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

si $g(s) = 0$ para todo $s < 0$, entonces

$$= \int_0^{\infty} f(t-s)g(s)ds$$

por otro lado, si $s > t$ entonces $t - s < 0$ y así $f(t-s) = 0$, por tanto

$$= \int_0^t f(t-s)g(s)ds \qquad \text{donde} \qquad t > 0.$$

Además, si en esta integral hacemos el cambio de variable $u = t - s$ ($du = -ds$), tenemos que

$$f * g(t) = \int_t^0 f(u)g(t-u)(-1)du = \int_0^t f(u)g(t-u)du = g * f(t).$$

Lo que de nuevo prueba que la convolución es una operación **conmutativa**.

La siguiente propiedad de la **convolución** respecto de la **transformada de Laplace** nos da información de como funcionan los sistemas lineales (como las E.D.O. lineales o los circuitos RLC). Esta propiedad es análoga a la que ya conocíamos en el contexto de la transformada de Fourier. Para probarla recordemos que $\widehat{f}(-is) = Lf(s)$.

Teorema 1. *Dadas dos funciones $f, g \in Lap(0,\infty)$, entonces*

$$L(f * g)(s) = Lf(s)Lg(s).$$

Demostración: Usaremos la propiedad análoga para la transformada de Fourier. Así

$$L(f * g)(s) = \widehat{f * g}(-is) = \widehat{f}(-is)\widehat{g}(-is) = Lf(s)Lg(s)\Box$$

Ejemplo 1. *Consideramos el problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x''(t) + a_1 x'(t) + a_2 x(t) = f(t) \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Hemos visto anteriormente que la solución de este problema en transformadas de Laplace es

$$Lx(s) = \frac{Lf(s)}{s^2 + a_1 s + a_2},$$

donde hemos llamado a $H(s) = \frac{1}{s^2+a_1 s+a_2}$ **función de transferencia del sistema**. Ahora si encontramos una función h de modo que $Lh = H$, entonces según el Teorema de arriba

$$Lx(s) = Lf(s)Lh(s) = L(f * h)(s)$$

y así, por la unicidad de la transformada de Laplace, tendremos que

$$x(t) = f * h(t).$$

Referencias

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es