ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

MÉTODOS ELEMENTALES DE RESOLUCIÓN DE E.D.O. I

Consideramos el problema general de primer orden:

$$x'(t) = f(t, x(t)).$$

Los Teoremas de Existencia y Unicidad (que se estudian en cursos superiores) nos dicen que este tipo de E.D.O tiene solución en cuanto f tenga alguna propiedad razonable (ser continua por ejemplo). ¿Sabemos como encontrar una solución explícita? La respuesta a un problema tan general es claramente negativa. Pensemos es un ecuación del tipo $f(x) = 0$. ¿Como despejamos "x"? A veces se puede. Teóricamente, si existe f^{-1}, siempre se puede despejar.

En algunos casos de E.D.O. sabemos resolver el problema $x'(t) = f(t, x(t))$ de forma explícita. Ya hemos resuelto:

- las ecuaciones de **variables separadas**;
- las ecuaciones **lineales** de primer orden homogéneas y no homogéneas.

Lo que sigue es una colección, no exhaustiva, de técnicas (o trucos) y de ecuaciones que se pueden resolver con estas "técnicas".

Cambio de variables.

Cuando estudiamos los sistemas del tipo $x' = Ax$, usabamos los cambios de variable $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}$ para reducir el problema a una forma más simple (la dada por la matriz de Jordan), que sabíamos resolver.

Hay algunos tipos de E.D.O. que pueden resolverse con cambios de variables.

Ecuaciones Homogéneas.

Definición 1. *Una función real de dos varibles*

$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & & (t, x) & \to & f(t, x) \end{array}$$

*se llama **homogénea** si para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y para todo $(t,x) \in \mathbb{R}^2$ se tiene que*

$$f(\lambda t, \lambda x) = f(t,x).$$

Ejemplo 1. $f(t,x) = \frac{t+x}{t-x}$.

Definición 2. *Una E.D.O. de primer orden*

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

*se llama **homogénea** si f es una función homogénea.*

El cambio de variable $z(t) = \frac{x(t)}{t}$ transforma la ecuación:

$$z'(t) = \frac{x'(t)t - x(t)}{t^2} = \frac{f(1, \frac{x(t)}{t})t - x(t)}{t^2} = \frac{f(1, z(t))}{t} - \frac{z(t)}{t},$$

en una ecuación de variables separadas en z.

Ejemplo 2. $(x^2 - 2y^2)dx + xydy = 0$.

Esta ecuación se escribe, "operando" con "diferenciales" como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 2y^2}{-xy} \qquad \Leftrightarrow \qquad y' = \frac{2y^2 - x^2}{xy}.$$

Esta última expresión es una E.D.O. **homogénea**. Hacemos el cambio de variable

$$z(x) = \frac{y(x)}{x}$$

y obtenemos

$$z'(x) = \frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} = \frac{f(1, \frac{y(x)}{x})x - y(x)}{x^2} = \frac{f(1, z(x))}{x} - \frac{z(x)}{x} =$$

$$\frac{2z^2(x) - 1}{xz(x)} - \frac{z(x)}{x} = \frac{1}{x}\frac{z^2(x) - 1}{z(x)}$$

que nos da una E.D.O. de variables separadas en z. Integrando

$$\int \frac{z'(x)z(x)}{z^2(x) - 1}dx = \int \frac{1}{x}dx$$

tenemos que

$$\frac{1}{2}\ln|z^2 - 1| = \ln x + K$$

y despejando

$$z(x) = \sqrt{Kx^2 + 1} \qquad \text{para todo} \qquad K > 0.$$

Y así

$$y(x) = xz(x) = x\sqrt{Kx^2 + 1} \qquad \text{para todo} \qquad K > 0,$$

es la solución general de nuestra ecuación.

Ejercicio 1. ***Ecuaciones reducibles a Homogéneas.***

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real y sean dos rectas del plano

$$r_1 = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \ : \ a_1 t + b_1 x + c_1 = 0 \}$$

y

$$r_2 = \{ (t, x) \in \mathbb{R} \ : \ a_2 t + b_2 x + c_2 = 0 \}.$$

Se considera la E.D.O.

$$x'(t) = f(\frac{a_1 t + b_1 x + c_1}{a_2 t + b_2 x + c_2}).$$

- *Si $(t_0, x_0) \in r_1 \bigcap r_2$, entonces prueba que el cambio de variable:*

$$\begin{array}{ccccc} t & = & s & + & t_0 \\ x(t) & = & y(s) & + & x_0 \end{array}$$

  transforma la E.D.O. en otra de la forma

$$y'(s) = f(\frac{y(s) - k_1 s}{y(s) - k_2 s})$$

  homogénea.
- *Si r_1 y r_2 son paralelas, prueba que el cambio:*

$$z(t) = a_2 t + b_2 x + c_2$$

  transforma la ecuación en otra de variables separadas.

Ecuación de Bernoulli.

Definición 3. *Una E.D.O. de primer orden de la forma:*

$$x'(t) = p(t)x(t) + q(t)x^n(t),$$

donde p y q son funciones continuas conocidas y $n \in \mathbb{R}$, se llama ***Ecuación de Bernoulli****.*

Observación 1. *Si $n = 0$ o $n = 1$ estamos ante una E.D.O. lineal. Si $n = 2$ y p y q son constantes, estamos ante una* ***Ecuación Logística*** *(que ya vimos).*

Una de las formas de solucionar la ecuación logística nos dice como resolver la ecuación de Bernoulli. El cambio de variable

$$z(t) = \frac{1}{x^{n-1}(t)}$$

transforma la ecuación de Bernoulli en una ecuación líneal.(**Ejercicio:** Comprueba que esto es así. En todo caso mira el ejemplo siguiente).

Ejemplo 3. *La E.D.O.* $\qquad t\dfrac{x'(t)}{x^3(t)} + \dfrac{1}{x^2(t)} = t$

Despejando la derivada, tenemos la E.D.O.

$$x'(t) = -\frac{1}{t}x(t) + x^3(t)$$

que es una ecuación de Bernoulli. Hacemos el cambio $z(t) = \frac{1}{x^2(t)}$. Así

$$z'(t) = \frac{-2x(t)x'(t)}{x^4(t)} = -\frac{2}{x^3(t)}(\,-\frac{1}{t}x(t) + x^3(t)\,) = \frac{2}{t}z(t) - 2,$$

que es una ecuación lineal. Si la integramos resulta que

$$z(t) = 2t + Kt^2 \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$x(t) = \sqrt{\frac{1}{2t + Kt^2}} \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Ecuación de Riccati.

Definición 4. *Una E.D.O. de primer orden de la forma:*

$$x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x^2(t) + c(t),$$

donde a, b y c son funciones continuas conocidas, se llama ***Ecuación de Riccati****.*

Es como una ecuación de Bernoulli, para $n = 2$, con un término independiente c. Si se conoce una solución particular x_1 de la ecuación, entonces el cambio de variable

$$z(t) = \frac{1}{x(t) - x_1(t)}$$

transforma la ecuación de Riccati en una ecuación líneal.(**Ejercicio:** Comprueba que esto es así. En todo caso mira el ejemplo siguiente).

Ejemplo 4. *La E.D.O.* $\quad y'(x) = y^2(x) + y(x) - 6$, *es una ecuación de Riccati donde a, b y c son constantes.*

Para resolver la ecuación, nos fijamos en que es fácil ver que $y_1 = 2$ es una **solución particular constante.** Hacemos el cambio de variable

$$z(x) = \frac{1}{y(x) - 2}.$$

Así

$$z'(x) = \frac{-y'(x)}{(y(x)-2)^2} = \frac{-(y^2(x) + y(x) - 6)}{(y(x)-2)^2} = \frac{-(y(x)+3)}{y(x)-2} = -5z(x) - 1,$$

que es una ecuación lineal. Integrándola,

$$z(x) = Ke^{-5x} - \frac{1}{5} \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$y(x) = \frac{1}{z(x)} + 2 = \frac{5}{Ke^{-5x} - 1} + 2 \qquad \text{para todo} \qquad K \in \mathbb{R} \qquad \square$$

Observación 2. *Dada cualquier E.D.O. de primer orden, está en nuestra capacidad o ingenio encontrar un cambio de variable que nos la transforme en otra que podamos resolver. ¡ Claro que, la cosa no pinta fácil !*

Ejercicio 2. *Resuelve las siguientes E.D.O. mediante el cambio de variable propuesto:*
a) $(x^2y^2 + 1)dx + 2x^2dy = 0$ *con el cambio* $xy = t$.
b) $(xy + 2xy\ln^2 y + y\ln y)dx + (2x^2\ln y + x)dy = 0$, *con el cambio* $x\ln y = t$.

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es