ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

CURVAS PLANAS EN E.D.O.

En la HOJA 0 de problemas, aparecían **curvas planas** dadas por ecuaciones:

- **explícitas**: $y = f(x)$;
- **implícitas**: $f(x, y) = 0$;
- **paramétricas** $\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(t) \\ y & = & g(t) \end{array} \right.$.

La solución de una E.D.O. de primer orden es una familia de curvas planas. Un sistema de E.D.O. de primer orden tiene por solución una familia de trayectorias en $\mathbb{R}^n$. En el caso $n = 2$ esta familia es una familia de curvas planas.

Debajo de todos los argumentos analíticos y algebraicos que hemos desarrollando subyace la geometría de estos problemas. En el caso de $n = 1$ o $n = 2$ es posibles visualizar la geometría de los problemas de E.D.O. Vamos a fijar esta idea a través de tres tópicos:

- representación de gráficas de soluciones de E.D.O. de primer orden.
- Método de las Isoclínas y familia de Curvas Ortogonales.
- Trayectorias de sistemas lineales autónomos planos.

El primero de estos tópicos lo hemos ido haciendo de forma sistemática desde el principio. Dado el problemas $x'(t) = f(t, x(t))$, E.D.O. de primer orden, si lograbamos encontrar una solución explícita $x(t)$, siempre hemos tratado de representar su gráfica (determinabamos el Dominio, las propiedades de la derivada x' vienen dadas por las propiedades de f, ...etc). Aunque puede haber sorpresas.

Ejemplo 1. *Resuelve* $y = 2xy' + \ln y'$ *(E.D.O. de* ***Lagrange****).*

En esta ecuación la variable es la x y la función incógnita es la y. La derivada y' **no está resuelta** respecto de la y (es decir, **no** tenemos el problema escrito de la forma $y' = (fx, y(x)))$. Se puede proceder para llegar a la solución, pero no de forma explícita sino paramétrica, es decir de la forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & f(p) \\ y & = & g(p) \end{array} \right.$$

donde $p \in \mathbb{R}$ es un parámetro. ¿De qué manera? **Ejercicio.** Deriva la ecuación (ambos términos de la ecuación). Se hace el cambio de varible:

$$y' = p.$$

Lo que queda se puede ver como una E.D.O. lineal no homogénea de x (incógnita) con respecto a p (variable). Se resuelve y se tiene: $x = f(p)$. Después, usando esta expresión de x y el cambio de variable se consigue escribir la y con respecto a p.

El **Método de las Isoclínas** ya lo hemos usado en una Práctica anterior (la seis); ahora vamos a darle nombre y brillo.

Por último, y de forma extensa, vamos a ver como son las trayectorias (y por tanto las distintas propiedades de las mismas) soluciones del problema:

$$x'(t) = Ax(t)$$

donde $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Ahora, todo lo que sabemos sobre las soluciones explícitas de este problema, un poco enmascarado por lo complicado del tema de la exponencial de una matriz, se vuelve más claro al poder dibujarlo. Tendremos que dibujar trayectorias planas: **curvas paramétricas en el plano.**

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`