ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

SISTEMAS AUTÓNOMOS.

Vamos a considerar sistemas de E.D.O. que no dependan de la variable independiente.

Definición 1. *Dada la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, al sistema de E.D.O. de primer orden*

$$x'(t) = f(x(t))$$

*se le llama **sistema autónomo** (al no depender la f de la variable t).*

Vamos a suponer que en los sistemas autónomos tenemos un Teorema de Existencia y Unicidad de soluciones.

Como sabemos, una solución del sistema es una trayectoria x

$$\begin{array}{ccccc} x & : & J \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^n \\ & & t & \to & x(t) \end{array}$$

cuya imagen en $\mathbb{R}^n$ es una curva. Vamos a fijarnos en estas curvas.

Definición 2. *Se llama **trayectoria** de la solución x a su imagen en $\mathbb{R}^n$ o también a la curva paramétrica que genera en $\mathbb{R}^n$*

$$trx = \{\ x(t) \in \mathbb{R}^n \ : \ t \in J\ \}.$$

Ejemplo 1. *Dado la E.D.O. lineal homogénea $x'(t) = ax(t)$, con $a \in \mathbb{R}$,*

sus soluciones son las funciones $x(t) = Ke^{at}$. En particular si $K > 0$ la trayectoria asociada es

$$trx = \{\ Ke^{at} \ : \ t \in \mathbb{R}\ \} \qquad \square$$

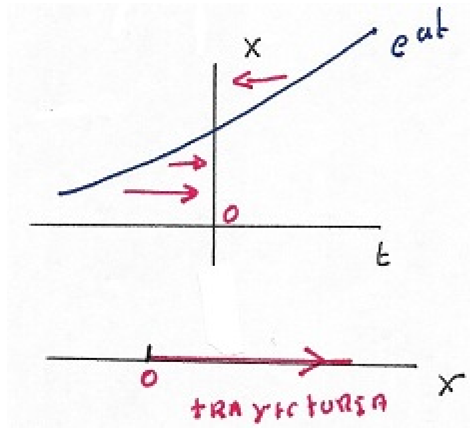

FIGURA 1. Gráfica de e^{at} y su trayectoria.

Ejercicio 1. *Prueba que en el ejemplo anterior solo hay tres trayectorias distintas.*

Esto no debe extrañarnos. Tenemos infinitas soluciones, pero solo tres trayectorias. El Lema 1. que veremos más adelante nos aclarará este fenómeno.

Ejemplo 2. *Consideramos el sistema* 2×2*:*

$$\begin{array}{rcll} x'(t) & = & 2x(t) & \\ y'(t) & = & & +3y(t) \end{array}.$$

Es claro que $\lambda = 2$ es un autovalor del sistema y un autovector asociadeo es $v = (1, 0)$. Así

$$(\, x(t), y(t)\,) = e^{2t}(1, 0)$$

es una solución del sistema. La trayectoria asociada es

$$tr(x, y) = \{(e^{2t}, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ t \in \mathbb{R}\,\}.$$

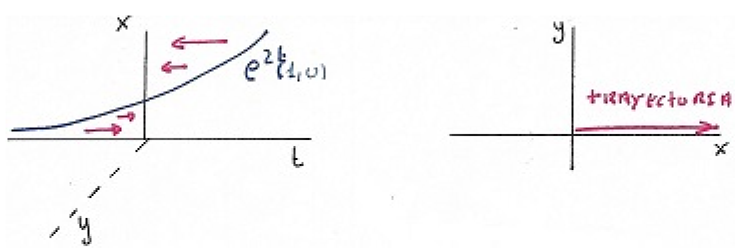

FIGURA 2. Gráfica de $e^{2t}(1, 0)$ y su trayectoria.

Observemos que la la gráfica de (x, y) está sobre el plano $''tx''$ y que su trayectoria es solo el semieje positivo de las $''x''$.

Otra solución del sistema es

$$(\, x(t), y(t)\,) = e^{2t}(1, 0) + e^{3t}(0, 1),$$

cuya trayectoria es (representamos esta curva paramétrica)

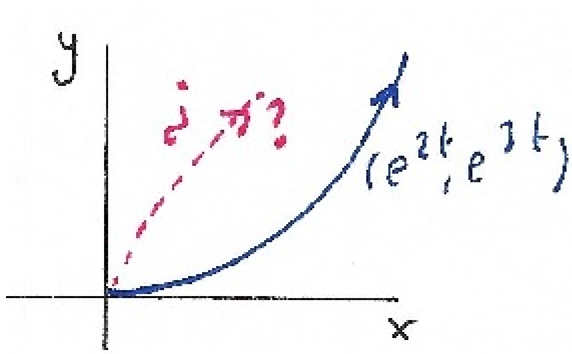

FIGURA 3. Trayectoria de $e^{2t}(1,0) + e^{3t}(0,1)$.

Observemos que si (x, y) está en el primer cuadrante, tanto la $''x''$ como la $''y''$ crecen, esto es por el método de las isoclinas que vimos anteriormente. Además

$$\begin{array}{c} \lim_{t\to-\infty}(x(t), y(t)) = (0,0) \\ \lim_{t\to\infty}(x(t), y(t)) = (\infty, \infty) \end{array}.$$

Por otro lado, la pendiente de la recta tangente es cualquier punto de la trayectoria $(x(t), y(t))$ viene dado por

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3e^{3t}}{2e^{2t}} = \frac{3}{2}e^t.$$

Este valor siempre es positivo, creciente (por eso el dibujo es convexo) y

$$\lim_{t\to-\infty} \frac{3}{2}e^t = 0.$$

Es decir, la trayectoria ”sale” de cero con pendiente nula. Con estos datos el gráfico azul es el correcto, mientras que el trazo rojo no puede serlo $\square$

En el ejemplo anterior hemos representado dos trayectorias de forma separada. La idea, para entender las soluciones del sistema, es representar todas sus posibles trayectorias (como en el Ejemplo 1.).

Definición 3. *Dado un sistema autónomo $x'(t) = f(x(t))$, se llama* ***Diagrama de Fases*** *del sistema al conjunto de* ***todas las trayectorias*** *del sistema.*

Observación 1. **a:** *Vamos a interesarnos por los* ***diagramas de fases*** *de los* ***sistemas lineales*** *planos de* ***coeficientes constante****. De ellos se puede hacer un estudio exahustivo.*

El interés de ello es que lo no lineal se puede apróximar por lo lineal.

b: *Si $x'(t) = f(x(t))$ es un* ***sistema autónomo no lineal*** *de modo que para algún x_0 se tiene que $f(x_0) = 0$ y la* ***diferencial*** *$Df(x_0) \neq 0$, entonces como una aproximación de f viene dada por*

$$f(x) \simeq Df(x_0)(x - x_0),$$

las propiedades de las soluciones de $x' = (f(x))$ se pueden deducir de las propiedades de las soluciones del sistema de coeficientes constantes

$$x'(t) = Df(x_0)(x(t) - x_0).$$

Sobre todo, las propiedades de **estabilidad de un punto de equilibrio**. *Es decir, el comportamiento de las trayectorias en relación con un punto de equilibrio.*

c: *El concepto de* ***estabilidad*** *de una solución $x_0(t)$ de un sistema $x' = f(x)$ se puede reducir, vía* ***b)****, a estudiar la estabilidad de la solución nula $y = 0$ de un sistema lineal con coeficientes constantes.*

Claro, si $x_0(t)$ es solución de $x' = f(x)$, entonces el cambio de variable

$$y(t) = x(t) - x_0(t)$$

$$y'(t) = x'(t) - x_0'(t) = f(y(t) + x_0(t)) - x_0'(t) = F(y(t)),$$

nos da el sistema equivalente

$$y'(t) = F(y(t)).$$

Claramente, $y = 0$ es una solución de este sistema. Ya podemos aplicar **b)** $\square$

Aunque todo esto, salvo el estudio de los sistemas con coeficientes constantes, es parte de asignaturas posteriores.

Propiedades de las trayectorias.

A continuación vamos a estudiar propiedades de las trayectorias en general. Estas propiedades nos serán útiles a la hora de representar los diagramas de fases (en nuestro caso de sistemas lineales de coeficientes constantes).

Observación 2. *Sean x_1 una solución del sistema autónomo $x' = f(x)$ y $c \in \mathbb{R}$. Entonces la trayectoria*

$$x_2(t) = x_1(t + c)$$

es también una solución del sistema. Lo que quiere decir que las traslaciones de la variable t nos dan soluciones nuevas, pero la trayectoria no cambia.

Demostración: **Ejercicio.**

Ejercicio 2. *¿Es cierto el resultado anterior para sistemas* ***no*** *autónomos?*

Lema 1. *Sea $x' = f(x)$ un sistema autónomo del cuál sabemos que se tiene un Teorema de Unicidad en todo el dominio de f. Si x_1 e x_2 son dos soluciones del sistema, entonces*

1. *o bien las trayectorias de ambas soluciones son* ***disjuntas****;*
2. *o bien ambas trayectorias son las mismas.*

Demostración: **Ejercicio.** Se usa el Teorema de Unicidad en caso de que las trayectorias no sean disjuntas.

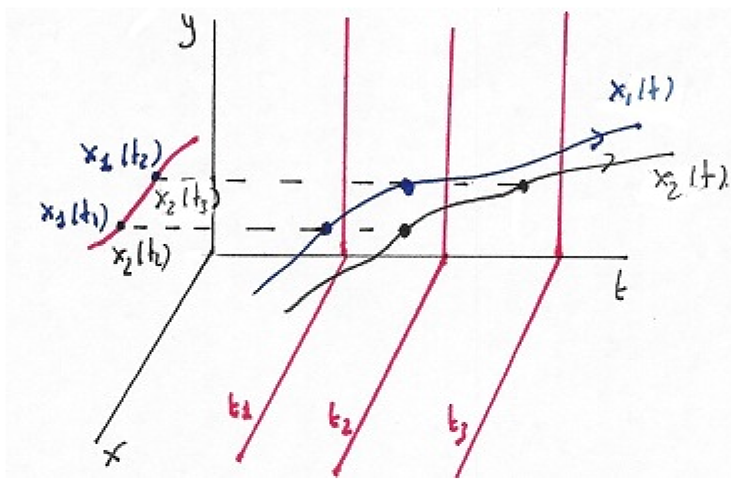

FIGURA 4. Demostración gráfica del Lema.

Lo que vemos es que x_2 es una traslación en el tiempo de x_1 o viceversa.

Lema 2. *Sea $x' = f(x)$ un sistema autónomo del cuál sabemos que se tiene un Teorema de Unicidad en todo el dominio de f. Si x_0 es una solución y existe un t_0 para el cual $x_0'(t_0) = 0$, entonces x_0 es una solución constante,*

$$x_0(t) = x_0(t_0) \qquad \textit{para todo} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración: **Ejercicio.**

Las soluciones constantes de los sistema autónomos tienen un nombre especial.

Definición 4. *Sea $x' = f(x)$ un sistema autónomo. Sea $x_0 \in Dom f$, de modo que $f(x_0) = 0$. La* ***solución constante***

$$x(t) = x_0$$

del sistema autónomo se le llama ***solución de equilibrio****.*

Observemos que en una solución de equilibrio, la derivada es nula. No hay movimiento. La trayectoria es un punto que permanece quieto o en equilibrio.

Lema 3. *Sea $x' = f(x)$ un sistema autónomo del cuál sabemos que se tiene un Teorema de Unicidad en todo el dominio de f. Sea $x(t)$ una trayectoria solución, entonces*

1. *o bien $x(t)$ es una* ***curva simple*** *en $\mathbb{R}^n$ (es decir no existen t_0 ni t_1 con $x(t_0) = x(t_1)$);*
2. *o bien $x(t)$ es una* ***curva periódica o cerrada*** *en $\mathbb{R}^n$ (es decir existe $\tau > 0$ tal que $x(t+\tau) = x(t)$ para todo t);*
3. *o bien x es una* ***solución de equilibrio****.*

Demostración:

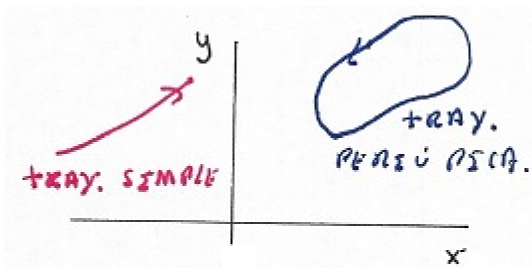

Figura 5. Curva simple y curva cerrada.

Si no se da **1)**, entonces existen t_0 y t_1, con $t_0 < t_1$, de modo que $x(t_0) = x(t_1)$. Se define

$$\tau = \min\{r > 0 \ : \ x(t_0 + r) = x(t_1) \ \}.$$

Este mínimo existe, por la propiedad del Ínfimo de los números reales y por ser x continua. Ahora

- si $\tau = 0$, existe una sucesión $(t_n)_n$ decreciente a t_0, de modo que $x(t_0) = x(t_n)$ para todo n. Ahora por la definición de derivada
$$x'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n) - x(t_0)}{t_n - t_0} = 0.$$
El Lema 2. nos dice que x es una solución de equilibrio.
- Si $\tau > 0$, entonces consideramos la solución trasladada $\overline{x(t)} = x(t+\tau)$. Tanto x como $\overline{x}$ son soluciones que coinciden en t_0. Ya que por definición de τ, $x(t_0) = x(t_0+\tau) = \overline{x}(t_0)$. Por el Teorema de Unicidad, las dos soluciones son la misma y por tanto
$$x(t+\tau) = x(t) \qquad \text{para todo} \quad t \qquad \square$$

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: `Cesar_Ruiz@mat.ucm.es`