ELEMENTOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

TEOREMA DE EXISTENCIA Y UNICIDAD.

Dada una E.D.O. de primer orden cualquiera

$$x'(t) = f(t, x(t),$$

ésta no tiene por que tener solución.

Ejemplo 1. $(x'(t))^2 + (x(t))^2 = -1$

Si despejamos la derivada

$$(x'(t))^2 = -1 - x^2(t),$$

vemos que no puede existir ninguna función real x que verifique tal ecuación.

Los Teoremas de Existencia y Unicidad de E.D.O. determinan las propiedades que deben tener las funciones f para poder asegurar que la E.D.O. $x'(t) = f(t, x(t)$ tenga solución, y adicionalmente unicidad de soluciones.

La idea de estos Teoremas, que vamos a seguir, es la siguiente. Dado el problema de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{rcc} x'(t) & = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. ,$$

podemos integrar (si $f(t, x(t)) \in \mathbb{R}^n$ lo hacemos coordenada a coordenada)

$$\int_{t_0}^{t} x'(s)ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds =$$

$$x(t) - x(t_0) = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds$$

y despejando

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds,$$

que es la **forma integral** del problema de Cauchy de arriba. En todo caso, buscamos una solución x que se derivable, por tanto continua.

Luego buscamos soluciones en $x \in C([a,b],\mathbb{R}^n)$. La forma integral de arriba la podemos transformar en un operador

$$\begin{array}{rcccccl} T & : & C([a,b],\mathbb{R}^n) & \to & C([a,b],\mathbb{R}^n) & & \\ & & x & \to & T(x)(t) & = & x_0 + \int_{t_0}^t f(s,x(s))ds. \end{array}$$

Observemos que este operador T está bien definido, ya que si x es continua (y pongamos que f también), entonces $T(x)$ no es solo continua sino derivable (Teorema Fundamental del Cálculo). El operador T es una aplicación de $C([a,b],\mathbb{R}^n)$ en si mismo. Si T tiene un punto fijo x para el cuál $T(x) = x$, este punto fijo sería una solución de nuestro problema de Cauchy.

Para leer la argumentación que sigue es conveniente repasar el Apéndice sobre Espacios Normados.

Vamos a ver el **Teorema de Existencia y Unicidad de Picard-Lindelöf (1890-94)** . La prueba original no usaba el Teorema de Punto Fijo de Banach, pero si un procedimiento del que es heredero el Teorema de Banach.

Teorema 1. *(**de Existencia Local de una E.D.O.**) Se considera el problema de Cauchy:*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right.$$

donde $t_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, ..., x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ *y* f *verifica las siguientes propiedades:*

a:

$$f : [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \Pi_{i=1}^n [x_{0,i}-\beta, x_{0,i}+\beta] = [t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times D \to \mathbb{R}^n$$

*es **continua** sobre el compacto* $[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times \Pi_{i=1}^n [x_{0,i}-\beta, x_{0,i}+\beta]$ *para ciertos* $\alpha, \beta > 0$. *Llamamos*

$$M = ||f_{|_{[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\times D}}||_\infty$$

al máximo de $||f(t,x)||_\infty$ *sobre los puntos* (t,x) *del compacto* $[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times D$.

b: f *es **Lipschitziana** en* x, *es decir existe* $N > 0$ *de modo que*

$$||f(t,x) - f(t,y)||_\infty \leq N||x-y||_\infty$$

para todo $x, y \in D = \Pi_{i=1}^n [x_{0,i}-\beta, x_{0,i}+\beta]$ *y para todo* $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$.

*En estas condiciones, **existe una única solución** x del problema de Cauchy que está definida al menos en el intervalo* $[t_0-h, t_0+h]$ *donde*

$$0 < h < \text{mín}\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{N}\}.$$

Este Teorema es de Existencia **Local** ya que da existencia en cierto entorno del punto t_0 y no en todo el intevalo $[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$. La condición sobre f de ser Lipschitz es realmente algo más fuerte que ser continua (aunque solo en al segunda variable, por eso no sobra la hipótesis **a)**)

Observación 1. *Si existen las derivadas parciales* $\frac{\partial f_j(t,x)}{\partial x_i}$, *para* $i, j = 1, 2, ..., n$ *y son continua sobre el compacto* $[t_0-\alpha, t_0+\alpha] \times D$, *entonces* f *es Lipschitziana.*

Demostración: (de la Observación) Por ser continuas las derivadas parciales sobre un compacto, existe $K > 0$ de modo que

$$K = \max_{i,j=1,2,...,n} \{ \| \frac{\partial f_j(t,x)}{\partial x_i} |_{[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\times D} \|_\infty \}.$$

Ahora si $z, y \in D$ y $t \in [t_0-\alpha, t_0+\alpha]$, se tiene que

$$\|f(t,z) - f(t,y)\|_\infty \leq \sum_{j=1}^{n} |f_j(t,z) - f_j(t,y)|.$$

Ahora para cada $j = 1, 2, ..., n$ y usando la desigualdad triangular

$$|f_j(t,z) - f_j(t,y)| \leq$$

$$|f_j(t, z_1, z_2, ..., z_n) - f_j(t, y_1, z_2, ..., z_n)| +$$

$$\sum_{l=2}^{n-1} |f_j(t, y_1, .., y_{l-1}, z_l, ..., z_n) - f_j(t, y_1, .., y_{l-1}, y_l, z_{l+1}, ..., z_n))| +$$

$$|f_j(t, y_1, y_2, ..., y_{n-1}, z_n) - f_j(t, y_1, y_2, ..., y_n)| \leq$$

usando el Teorema del Valor Medio (existen ζ_l para las que)

$$|\frac{\partial f_j(t,\zeta_1)}{\partial x_1}||z_1 - y_1| + \sum_{l=2}^{n-1} |\frac{\partial f_j(t,\zeta_1)}{\partial x_l}||z_l - y_l| + |\frac{\partial f_j(t,\zeta_n)}{\partial x_n}|z_n - y_n| \leq$$

$$K \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i| \leq nK \|z - y\|_\infty.$$

Por último vemos que

$$\|f(t,z) - f(t,y)\|_\infty \leq n^2 K \|z - y\|_\infty \qquad \square$$

Veamos ahora la prueba del teorema.

Demostración: (del Teorema de Existencia) Consideramos

$$0 < h < \min\{\alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{1}{N}\}$$

(ya veremos durante la prueba el por que de esta restricción). Se considera el **espacio normado completo** X

$$X = (\, C([t_0-h, t_0+h], D \subset \mathbb{R}^n), \|\quad\|_\infty \,) =$$

$$\{g : [t_0-h, t_0+h] \to D \;\; : \;\; g \text{ continua } \},$$

con la noram $|| \quad ||_\infty$ (ver Apéndice sobre Espacios Normados). Se considera sobre X el **operador** T

$$\begin{array}{ccccc} T & : & X & \to & X \\ & & g & \to & T(g)(t) \;=\; x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, g(s))ds, \end{array}$$

donde la integral la entendemos coordenada a coordenada. Veamos que T está **bien definido** y que es **continuo** y algo más es **contractivo**.

- **Ver que esta bien definido** es probar que para todo $g \in X$ ocurre que $T(g) \in X$.

  Por un lado como $g \in X$ es continua y como por hipótesis f también lo es, el Teorema fundamental del cálculo nos dice que $T(g)$ es una función continua sobre el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$.

  Ahora tenemos que ver que para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ ocurre que $T(g)(t) \in D$. Claro, como $g \in X$ se sigue que para todo $t \in [t_0 - h, t_0 + h]$ se tiene que $g(t) \in D$. Ahora

$$||T(g)(t) - x_0||_\infty =$$

$$\max_{j=1,2,..,n} \{ \max\{ \,|\int_{t_0}^{t} f_j(s, g(s))ds| \; : \; t \in [t_0 - h, t_0 + h] \,\} \} \leq$$

$$\max_{j=1,2,..,n} \{ \max\{ \int_{t_0}^{t} |f_j(s, g(s))|ds \; : \; t \in [t_0 - h, t_0 + h] \,\} \} \leq$$

$$\max\{ \int_{t_0}^{t} ||f(s, g(s))||_\infty ds \; : \; t \in [t_0 - h, t_0 + h] \,\} \leq$$

  como $g(t) \in D$ y f está acotada sobre $[t_0 - h, t_0 + h] \times D$

$$Mh \leq \beta$$

  donde la última desigualdad se da por la elección de h.

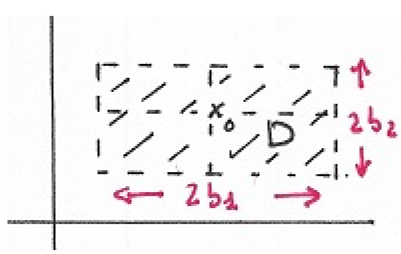

FIGURA 1. Entorno de x_0.

- **La continuidad de** T la vemos del siguiente modo. Vamos a ver algo más fuerte, T es **contractiva**.

  Sean $g_1, g_2 \in X$. Ahora (usando indistintamente $|| \quad ||_\infty$ como la norma de $\mathbb{R}^n$ o la norma de X, ver Apéndice sobre Espacios Normados)

$$||T(g_1) - T(g_2)||_\infty =$$
$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]}\{ \, || \int_{t_0}^{t} f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))ds||_\infty \, \} =$$
$$\max_{j=1,2,\ldots,n}\{ \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]}\{ \, | \int_{t_0}^{t} f_j(s,g_1(s)) - f_j(s,g_2(s))ds| \, \} \} \leq$$
$$\max_{j=1,2,\ldots,n}\{ \max_{t\in[t_0-h,t_0+h]}\{ \int_{t_0}^{t} |f_j(s,g_1(s)) - f_j(s,g_2(s))|ds \, \} \} \leq$$
$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]}\{ \int_{t_0}^{t} ||f(s,g_1(s)) - f(s,g_2(s))||_\infty ds \, \} \leq$$

y como f es Lipschitz y $g_1(s), g_2(s) \in D$ para todo $s \in [t_0 - h, t_0 + h]$

$$\max_{t\in[t_0-h,t_0+h]}\{ \int_{t_0}^{t} N||g_1(s) - g_2(s)||_\infty ds \, \} \leq$$
$$hN||g_1 - g_2||_\infty.$$

Donde por la elección de h se sigue que

$$0 < hN < 1.$$

Por tanto T es contractiva.

Ahora podemos aplicar a T el **Teorema de Punto Fijo de Banach** (ver Apéndice de Espacios Normados). Así tomando la función constante $x_0(t) \equiv x_0$ y la sucesión recurrente

$$x_k(t) = T(x_{k-1})(t) \qquad \text{para} \qquad k \geq 1,$$

tenemos que existe

$$\lim_{k\to\infty} T(x_k) = x.$$

Este x es el único punto fijo del operador T y por tanto solución de la E.D.O.

$$x(t) = T(x)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds;$$

además, claramente $x(t_0) = x_0$ (la integral se anula para $t = t_0$). Luego x es solución única del problema de Cauchy al menos en el intervalo $[t_0 - h, t_0 + h]$ $\square$

Observación 2. *La iteración del Teorema de Punto Fijo que hemos visto ahora al final de la prueba del Teorema de Existencia nos proporciona un **Método Númerico** para aproximar la solución de problema de Cauchy*

$$\begin{cases} x'(t) &= f(t,x(t)) \\ x(t_0) &= x_0 \end{cases}$$

(aunque no es un método que converja muy deprisa; ver Métodos Numéricos para E.D.O.)

Claro, si tomamos la función constante $x_0(t) \equiv x_0$, la sucesión recurrente

$$x_k(t) = T(x_{k-1})(t) \qquad \text{para} \qquad k \geq 1$$

y

$$x = \lim T(x_k) \qquad \text{(punto fijo)},$$

entonces

$$||x_k - x||_\infty = ||T(x_{k-1}) - T(x)||_\infty \leq$$

por ser T contractiva

$$Nh||x_{k-1} - x||_\infty \leq ....$$

repitiendo el proceso

$$.... \leq (Nh)^k||x_0 - x||_\infty \leq (Nh)^k\beta$$

donde la última desigualdad se da ya que $x(t) = T(x)(t) \in D$ (según la notación del Teorema). Como $Nh < 1$,

$$(Nh)^k\beta \rightarrow_{k\to 0} 0$$

y así las iteraciones x_k se acercan a x cuando k se hace grande □

Departamento de Análisis Matemático y Matemática Aplicada, Facultad de Matemáticas, Universidad Complutense, 28040 Madrid, Spain
E-mail address: Cesar_Ruiz@mat.ucm.es